UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN

VICE RECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

DIRECCIÓN DE POSTGRADO

TESIS DE MAESTRIA

CONCEPCIONES MATEMÁTICAS EN LOS ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO DE LA ESCUELA NORMAL MIXTA "PEDRO NUFIO" ACERCA DE LAS FRACCIONES Y SUS DIFERENTES INTERPRETACIONES.

TESISTA:

Licda. KARLA VALESCA MATUTE COLINDRES

ASESORA DE TESIS:

M.Sc. LIBNI BERENICE CASTELLÓN

Tegucigalpa M.D.C. Noviembre del 2010

CONCEPCIONES MATEMÁTICAS EN LOS ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO DE LA ESCUELA NORMAL MIXTA “PEDRO NUFIO” ACERCA DE LAS FRACCIONES Y SUS DIFERENTES INTERPRETACIONES.

U N I V E R S I D A D P E D A G Ó G I C A N A C I O N A L
F R A N C I S C O M O R A Z Á N

V I C E R E C T O R Í A D E I N V E S T I G A C I Ó N Y P O S T G R A D O

D I R E C C I Ó N D E P O S T G R A D O

CONCEPCIONES MATEMÁTICAS EN LOS ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO DE LA ESCUELA NORMAL MIXTA "PEDRO NUFIO" ACERCA DE LAS FRACCIONES Y SUS DIFERENTES INTERPRETACIONES.

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MASTER EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

T E S I S T A:

Licda. K A R L A V A L E S C A M A T U T E C O L I N D R E S

A S E S O R A D E T E S I S:

M.Sc. L I B N I B E R E N I C E C A S T E L L Ó N

Tegucigalpa M.D.C. Noviembre del 2010

RECTORA

M.Sc. Lea Azucena Cruz Cruz

VICE RECTOR ACADÉMICO

M.Sc. David Orlando Marín

VICE RECTOR DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

Dr. Truman Bitelio Membreño

VICE RECTOR DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

M.Sc. Gustavo Adolfo Cerrato

VICE RECTOR ADMINISTRATIVO

M.Sc. Hermes Alduvin Díaz

SECRETARÍA GENERAL

M.Sc. Iris Milagro Erazo

DIRECTORA DE POSTGRADO

Dra. Jenny Margoth Zelaya

Tegucigalpa M.D.C. Noviembre del 2010

Esta tesis fue aceptada y aprobada por la Terna Examinadora nombrada por la Dirección de Estudios de Postgrado de la UPNFM, como requisito para optar al grado académico de Master en Matemática Educativa

Tegucigalpa 23 de Noviembre del 2010

PhD. José Adalid Gutiérrez
Examinador-Presidente

Dra. Dania María Orellana
Examinadora

M.Sc. Libni Berenice Castellón
Asesora de Tesis

Karla Valesca Matute Colindres
Tesista

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a Dios, todo poderoso, por brindarme sabiduría, paciencia y la fortaleza necesaria para poder concluir con mis estudios de maestría. A mi hijo por la comprensión que tubo durante todo este tiempo, en donde la dedicación hacia él fue limitada, a mis hermanas por el apoyo incondicional que me dieron durante el desarrollo de la maestría. A mi asesora de tesis por dedicarme parte de su tiempo y compartir sus conocimientos con migo, permitiéndome de esa forma culminar este proyecto, y a la Universidad por brindarme la oportunidad de profesionalizarme y aumentar mis conocimientos.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En la actualidad son muchas las investigaciones que se han hecho sobre las fracciones, sabiendo que este es uno de los conceptos más complejo de comprender en los estudiantes en cualquier nivel en que se desenvuelvan. También se ha afirmado que la enseñanza de la fracciones es una de las tareas más difíciles lo que se le atribuye a varios factores, y entre ellos se menciona la ignorancia tanto del docente como del alumno sobre los distintos significados que tiene el concepto de fracción (León, Fuenlabrada, 1996).

Las investigaciones sobre las fracciones en su mayoría se han desarrollado en el nivel primario, ya que en este nivel se enfatiza la enseñanza de este concepto, sin embargo se considera necesario, continuar investigando en los niveles posteriores, es decir en la educación media, y encontrar en qué medida se puede disminuir la complejidad en la comprensión de este importante concepto, tomando en cuenta algunos modelos propuestos o ensayados en otros contextos.

Kieren (1976) citado en Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) fue una de las pioneras en cuestionar la comprensión del concepto de fracción como un solo elemento y recomienda reconocerlo como un juego de estructuras interrelacionadas: parte todo, cociente, operador, razón y medida. Este modelo teórico ha sido utilizado por muchos investigadores e incluso en planes de estudio como el desarrollado por el Proyecto de Números Racionales (RNP, por sus siglas en inglés) en USA, ya que las fracciones tienen una aplicabilidad en múltiples contextos como ser, la ciencia, la técnica, el arte, la vida cotidiana entre otros.

La comprensión del concepto de fracción es un objetivo fundamental que se debe alcanzar desde los primeros años de escolaridad, el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000) en su propuesta que concierne a las fracciones para 6°, 7° y 8° manifiesta como uno de sus estándares el desarrollo de habilidades y soltura en la operatoria con números racionales. Del mismo modo el Currículo Nacional Básico contempla en sus expectativas de logro que un estudiante al finalizar el séptimo grado debe ser capaz de resolver situaciones de la vida cotidiana que involucren fracciones. (DCNB, 2005)

Por lo anterior es de suma importancia que los estudiantes comprendan el concepto de fracción y sus diferentes interpretaciones, de tal manera que cualquier situación afín que en la vida se les presente no muestren dificultades para resolverla, del mismo modo el docente como facilitador debe propiciar el camino para llegar a lograr tal fin.

Los estudios aquí citados conciben un acercamiento a la comprensión de las fracciones y sus interpretaciones tomando en cuenta su aplicabilidad en la vida cotidiana. En este contexto referencial se determinó puntualizar específicamente en **La comprensión del concepto de fracción y sus diferentes interpretaciones** así como explorar las estrategias que los estudiantes utilizan al resolver problemas, los errores y dificultades que presentan. Para lograr dicha comprensión se planeó realizar instrucciones didácticas y desarrollo de actividades que involucren resolución de problemas como medio ideal.

Esta obra está estructurada en cinco capítulos que en resumen tratan lo siguiente:

Capitulo 1: Expone la contextualización del problema, con sus preguntas y objetivos, también se justifica el estudio y se presentan algunos antecedentes de investigaciones hechas anteriormente.
Capitulo 2: Presenta los fundamentos teóricos que guiaron el estudio, considerando algo de historia, la explicación de cada una de las interpretaciones del concepto de fracción, la resolución de problemas, las estrategias y errores que se han encontrado en otros estudios hechos.
Capitulo 3: Contiene una descripción detallada de la metodología que se empleó en el estudio, el tipo de investigación, los participantes, instrumentos utilizados, el proceso de recolección y análisis de datos.
Capitulo 4: Presenta un análisis cualitativo de la información obtenida durante el estudio, en donde se detalla el desempeño del alumno en el desarrollo de cada uno de los instrumentos aplicados, y en las sesiones de trabajo.
Capitulo 5: Presenta las conclusiones a las que se llegó con los resultados del estudio
Finalmente se presenta la bibliografía y los anexos, conformados por la prueba diagnóstica y las hojas de trabajo empleada para explorar los conceptos.

CAPITULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Situación Problemática

Como docente de matemáticas surgen muchas interrogantes, queriendo entender o comprender las dificultades que esta asignatura presenta para los estudiantes ya que muchos la consideran difícil. En estas circunstancias es una tarea ardua tratar de cambiar en ellos las concepciones erróneas que poseen; ya que muchas veces las consideran ciertas y las han utilizado por mucho tiempo e incluso algunas fueron enseñadas por sus profesores.

Los profesores como facilitadores del proceso de enseñanza aprendizaje estamos en la obligación de tener un conocimiento y dominio amplio en la materia y a la vez contribuir en el desarrollo de habilidades y destrezas de pensamiento matemático en los estudiantes en el nivel que corresponde, además conocer sus fortalezas y debilidades, ya que lo que para algunos puede ser sencillo de comprender para otros es más difícil.

En el nivel secundario particularmente en séptimo grado se espera que los alumnos logren un aprendizaje significativo alrededor de las fracciones y sus interpretaciones, sin embargo es donde se evidencian las mayores dificultades de comprensión principalmente en la construcción de este concepto matemático. Son muchas las investigaciones que se han hecho en el nivel primario y secundario, en las que se concluye que el concepto de fracción es difícil ya que generalmente existe un análisis defectuoso del concepto mismo y sus múltiples interpretaciones (Hart, 1983; Streefland, 1983; Citados en Luelmo, 2004; Mancera 1992 citado en Parra/Flores s/f), en las cuales se han confirmado las deficiencias y los errores que presentan estudiantes y maestros; dicha situación no es ajena a nuestro contexto.

Otros autores expresan que las dificultades presentadas en el proceso de enseñanza aprendizaje de las fracciones se deben a varios factores tales como, la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar, el desconocimiento por parte de los maestros, los esquemas que el estudiante necesita para otorgarle un significado a las fracciones, los conocimientos implícitos que este posee, el razonamiento inconsistente por parte de ellos, errores en la realización de la operación, falta de estrategias metacognitivas para dirigir procesos de solución, entre otras (León, 1998; Flores, 1999; Schoenfeld, 1992; citados en Parra, (s/f)), el concepto de fracción es uno de los conceptos más usados en situaciones de nuestra vida cotidiana, por la diversidad de representaciones y la falta de exactitud en la naturaleza.

Figueras (1996), Freudenthal (1983), Kieren, (1993), Perera y Valdemoros (2002), Pitkethly y Huntigg (1996) Valdemoros (2001), todo ellos citados en Perera y Valdemoros (2007) afirman que las fracciones presentan dificultades para su enseñanza aprendizaje principalmente en los niveles básicos de educación.

Freudenthal (1983), menciona que uno de los factores que influye pueden ser determinados por la didáctica tradicional empleada en la enseñanza, la cual es muy importante en el proceso de aprendizaje.

Por experiencias que se ha tenido en el nivel secundario se ha observado problemas en la comprensión y aplicación de las fracciones, situación que puede ser evidenciada cuando el estudiante es sometido a evaluaciones, tanto formativas como sumativas, y además se observa que en los años subsiguientes los estudiantes no manifiestan una base conceptual sólida y hay poca soltura en el desarrollo de operaciones que involucran fracciones. Por lo que es considerable para el docente de matemáticas y de suma importancia conocer cuáles son las concepciones que tienen los estudiantes acerca de las fracciones y sus diferentes interpretaciones, así mismo desarrollar actividades didácticas que contribuyan a mejorar o fortalecer la comprensión de este concepto, y a la vez enriquecer la adquisición de habilidades de pensamiento matemático en ellos.

Por lo anterior es importante identificar cuáles son las estrategias que los estudiantes usan para resolver problemas con fracciones, errores que cometen y dificultades que presentan. Se espera trabajar con ellos alrededor de las fracciones en sus interpretaciones como parte todo, como operador, y como medida, la interpretación como cociente y razón no podrá ser abordada ya que en ese momento no se estudian los números decimales, además estas interpretaciones involucran dos magnitudes, situación diferente a las interpretaciones anteriores.

Se desea utilizar instrucciones didácticas y actividades de aprendizaje que contribuyan a mejorar la calidad educativa, desarrollar habilidades de pensamiento y destrezas en las operaciones con fracciones, reducir en alguna medida las dificultades y errores encontrados en el proceso aprendizaje de los alumnos, se tomaron como base actividades implementadas en otros contextos que han demostrado contribuir al desarrollo exitoso del concepto de fracción. Dichas actividades han sido adecuadas a nuestro medio y puestas en práctica en el aula de clase.

1.2. Justificación

Las fracciones y sus diferentes interpretaciones son un problema para los estudiantes ya que se les dificulta este concepto, lo que conlleva a un aprendizaje momentáneo y no para la vida, se preocupan más por memorizar un algoritmo y no por comprender el significado y su aplicación. Brown y Quinn (2006) consideran que "si el estudiante aprende a base de algoritmos cuando el concepto va más allá de la fuerza cognitiva del aprendiz entonces este deja su propio pensamiento y opta por la memorización haciéndolo sin entender" (Pág. 29). Esto implica que para que haya un aprendizaje significativo el alumno debe ser capaz de relacionar los conceptos matemáticos con situaciones familiares, de tal forma que pueda construir su propio aprendizaje y no se convierta en una simple memorización, ya que hasta en la simple compra de un artículo en una tienda o en un supermercado se usan las fracciones, por ejemplo cuando se refiere a medio litro de leche, un cuarto de aceite para el auto, yarda y media de tela, mitad de precio de un artículo entre otros.

Al respecto las aplicaciones de las fracciones en situaciones de la vida diaria son diversas, autores como Valdemoros (2004); Charalambous y Pitta-Pantazi (2007); Clarke, Roche, y Mitchel (2007) Lamon (2006) entre otros proponen una serie de problemas en muchos de sus estudios, en los que se evidencian dificultades de los estudiantes para resolverlos.
A continuación se presenta un ejemplo de la aplicación de fracciones en la vida cotidiana Propuesto por Lamon (1993) citado en Charalambous y Pitta-Pantazi (2007)
"Siete personas desean compartir tres pizzas de peperoni idénticas ¿Cuánta pizza comerá cada persona?" (Pág. 297), estas situaciones aparentemente son sencillas de resolver, sin embargo los autores anteriormente mencionados expresan las dificultades que causa en los estudiantes tratar de resolver este tipo de problemas.

Es importante saber que las fracciones aparecen en la matemática Egipcia durante la edad de bronce, surge como un concepto vago por la necesidad del hombre para resolver situaciones que involucraban fracciones, se utilizaba cierta simbología para su representación. Las fracciones unitarias, así llamadas en esa época por que son fracciones cuyo numerador es la unidad, fueron mayormente utilizadas en la época de Ahmes. Los cálculos que aparecían en este papiro se prestaron para deducir que los egipcios habían conseguido desarrollar un alto grado de virtuosismo en el manejo del concepto de fracción unitaria (Boyer, 1968).

Las situaciones que se planteaban en esa época sobre fracciones no eran tan fáciles de resolver, ya que no se contaba con tanto aporte como el que se tiene ahora, sin embargo estas siguen representando problemas en el aprendizaje de los alumnos, esto queda evidenciado en el tiempo que este concepto se desarrolla, ya que es en este momento cuando el estudiante baja su rendimiento. En las evaluaciones, los estudiantes demuestran las debilidades que tienen, así como las confusiones con los algoritmos, por ejemplo en la suma y resta, un caso en particular $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ en donde suman numerador con numerador y denominador con denominador. También puede suceder que resuelvan los ejercicios correctamente, pero no entienden lo que está pasando, se les presentan otras circunstancias y no logran, establecer relaciones o simplemente no recuerdan como resolver operaciones que involucren fracciones.

Las fracciones se estudian desde la escuela primaria con más énfasis en los grados de tercero a sexto, luego en secundaria se enseña como números racionales, en ambos niveles los alumnos presentan problemas de aprendizaje (León, Fuenlabrada,1996; Parra Álvarez, Flores, s/f), lo que no debería ser, ya que en secundaria se supone que ellos tienen conocimientos previos sobre fracciones, pero cuando se desarrollan actividades de aprendizaje que involucren fracciones en el aula de clases, los estudiantes aparentemente no tienen dominio sobre este concepto pareciera que es algo desconocido o nuevo, lo que es motivo de preocupación lo que quiere decir que no hubo aprendizaje significativo.

Al respecto los resultados obtenidos en las pruebas que realizadas durante los últimos veinte años por el National Assessment Educational Progress (NAEP, por sus siglas en inglés) revela que los estudiantes de la escuela secundaria “recurrentemente demuestran una falta de habilidad y entendimiento de las fracciones” (Brown y Quin, 2006, Pág. 28).

Según el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2002) en los niveles 6, 7 y 8 el estudiante debe desenvolverse muy bien con fracciones, mostrar mayor soltura operatoria y debería darse mayor importancia a las operaciones con números racionales, apoyándose en los conocimientos adquiridos, las destrezas relativas a los números naturales y experiencias anteriores con fracciones. También establecen que los alumnos cuando poseen una base sólida conceptual sobre fracciones deberían en menor escala cometer errores con ellas frente al que no las tiene (Pág. 222).

Al analizar el Currículo Nacional Básico (CNB) en el tercer ciclo se encuentran unidades de números racionales teniendo como meta principal: “lograr que los estudiantes desarrollen habilidades y destrezas para resolver problemas de la vida diaria que involucren operaciones con fracciones”, al respecto el NCTM (2000) establece que en esta etapa el alumno debe ser hábil en el trabajo de fracciones, tener una fuerte comprensión de las diferentes formas de representación.

Tratando de cumplir con las expectativas del currículo es de suma importancia centrar esta investigación en el estudio de las fracciones y sus diferentes interpretaciones, conocer cómo los estudiantes conciben este concepto, cuáles son las dificultades que obstaculizan el aprendizaje significativo y desarrollar actividades de aprendizaje que contribuyan a fortalecer y mejorar esta situación.

1.3. Objetivos de investigación

Con la problemática planteada anteriormente surge el interés en explorar los procesos de pensamiento matemático cuando se trabaja con el concepto de fracción, y las operaciones entre ellas, con los alumnos de séptimo grado de la Escuela Normal Mixta “Pedro Nufio” (ENMPN).

Para responder este problema se plantearon los siguientes objetivos:

1. Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes de séptimo grado de la ENMPN al momento de resolver situaciones que involucren fracciones y sus diferentes interpretaciones.
2. Identificar los errores y dificultades más comunes que presentan los estudiantes al resolver situaciones que involucren fracciones.
3. Desarrollar actividades de aprendizaje que fortalezcan la comprensión del concepto de fracción y sus diferentes interpretaciones.

1.4. Preguntas de investigación

De los objetivos anteriores se desprenden las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son las estrategias utilizadas por los estudiantes de séptimo grado de la ENMPN al resolver problemas que involucren el concepto de fracción y sus diferentes interpretaciones?
2. ¿Cuáles son los errores y dificultades presentados por los estudiantes de séptimo grado de la ENMPN al resolver problemas que involucren fracciones y sus interpretaciones?
3. ¿Qué tipo de actividades de aprendizaje fortalecen la creación de concepciones matemáticas relacionadas con el concepto de fracción y sus diferentes interpretaciones?

CAPITULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1. Un recorrido a través del estudio de las fracciones

La historia de las fracciones comenzó en Egipto cuando por primera vez debido al alcance de un nivel cultural en la edad del bronce se presenta la necesidad del uso de un concepto mas o menos vago sobre fracciones, usando sólo aquellas de la forma $1/n$ las cuales las llamaban fracciones unitarias, es decir las fracciones cuyo numerador es uno. Los egipcios utilizaban jeroglíficos para representar las fracciones, estos aparecían en los papiros. Según Boyer C. (1968) el papiro de Ahmes encontrado en 1858 en una ciudad comercial de Nilo por el anticuario escocés Henry Rhind, expresa algunas costumbres que usaban los egipcios para representar fracciones, por ejemplo a la fracción $2/3$ le asignaban un papel importante en sus cálculos aritméticos, conocían y utilizaban de que los dos tercios de una fracción unitaria $1/n$ era igual a la suma de las dos fracciones unitarias $1/2n$ y $1/6n$, y para descomponer números de la forma $2/n$ sugieren una tabla seguida de otra $n/10$, para n de 1 a 9 en la que estas fracciones son descompuestas en términos de las unitarias y de la fracción $2/3$.

Es evidente que los egipcios tenían un dominio basto en el uso de las fracciones unitarias, ya que toda fracción la expresaban como la suma de estas. Por otra parte los babilonios también desarrollaban su sistema de notación fraccionaria, que permitió hacer aproximaciones decimales. Ellos tuvieron la idea de extender el principio posicional a las fracciones y no solo a los números enteros. Al respecto los chinos conocían muy bien las operaciones con fracciones ordinarias de tal forma que conocían cómo calcular el común denominador de varias fracciones.

Boyer (1968) menciona que los chinos "Utilizaban analogías con el sexo se referían al numerador como ´ *el hij*o ´ y el denominador como ´ *la madre* ´. El énfasis generalizado en toda cultura china sobre los principios del ying y el yang hacía más fácil seguir las reglas para manipular fracciones" (Pág. 264). También implementaban el sistema de medidas sexagésimas al igual que los babilonios. La adopción de este sistema en pesos y medidas dio como resultado que se impusiera el hábito decimal en el uso de las fracciones.

Es claro que todos los procedimientos utilizados por los egipcios, babilonios y chinos son familiares en nuestro contexto y resalta la necesidad de que los estudiantes manejen con mucha soltura el concepto de fracción y la solución de situaciones que involucren a estas. Después de estudiar un poco el papel que desempeñaron las fracciones a través de la historia y la utilidad que estas han tenido en la vida cotidiana se presenta el concepto de fracción visto en la actualidad y las múltiples interpretaciones que este tiene.

2.2. Concepto de fracción

Generalmente fracción se define como un número de la forma a/b donde a y b, son números enteros y $b \neq 0$, esto se entiende como el resultado de dividir una unidad o un todo en partes iguales (b) y luego tomar una colección integrada por a de esas partes. Conociéndose "*a*" como numerador y "*b*" como denominador.

Freudenthal (1983) establece que "Las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional, una fuente que nunca se seca. Es la palabra con la que entra el número racional y esta relacionada con romper: fractura." (Pág.10)

Al respecto Swokowski (1993) define las "fracciones como una expresión a/b que se utiliza para representar $a \div b$, a la que también se le llama cociente de a y b o fracción de a sobre b, donde los números a, b son numerador y denominador respectivamente, y como 0 no tiene inverso multiplicativo a/b no esta definida si b=0" (Pág. 7)

2.3. Las fracciones y sus diferentes interpretaciones

Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) presentan un modelo teórico de las cinco interpretaciones del concepto de fracción: parte-todo, razón, operador, cociente y medida. Estas interpretaciones o llamadas también subconstructos están basadas en la proposición hecha originalmente por Kieren quien fue, la pionera en la categorización del concepto de fracción durante los años setenta y cuya categorización fue luego expandida por Behr, Lesh, Post y Silver (1983) en el Proyecto de los Números Racionales, RNP (por sus siglas en ingles) Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) consideran que se le debe dar énfasis a la relación y diferencias que tienen cada una de las interpretaciones de la fracción; por lo anterior Lamon

(2006) y Kieren (1976) citado en Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) manejan que el entendimiento y la comprensión del concepto de fracción dependen de cómo se entienda cada significado, por lo que es importante tener claro en qué consiste cada uno. Al respecto Behr et al. (1983) como miembros del RNP propusieron el modelo teórico presentado en la figura 1, en el que se intenta relacionar las cinco interpretaciones de la fracción a cada una de las operaciones básicas y problemas que requieren el manejo de éste concepto, como ser: equivalencia de fracciones, operaciones y resolución de problemas. El modelo presenta la interpretación de la fracción parte – todo como la base para poder aprender las demás interpretaciones, luego las flechas indican la relación existente entre estas y las operaciones.

La interpretación de la razón influye en la comprensión de las fracciones equivalentes, la de operador influye en la multiplicación, y la interpretación de medida en el entendimiento de la suma; cuando se logra que el estudiante comprenda las cinco interpretaciones del concepto de fracción esto tendrá resultados favorables en la resolución de problemas.

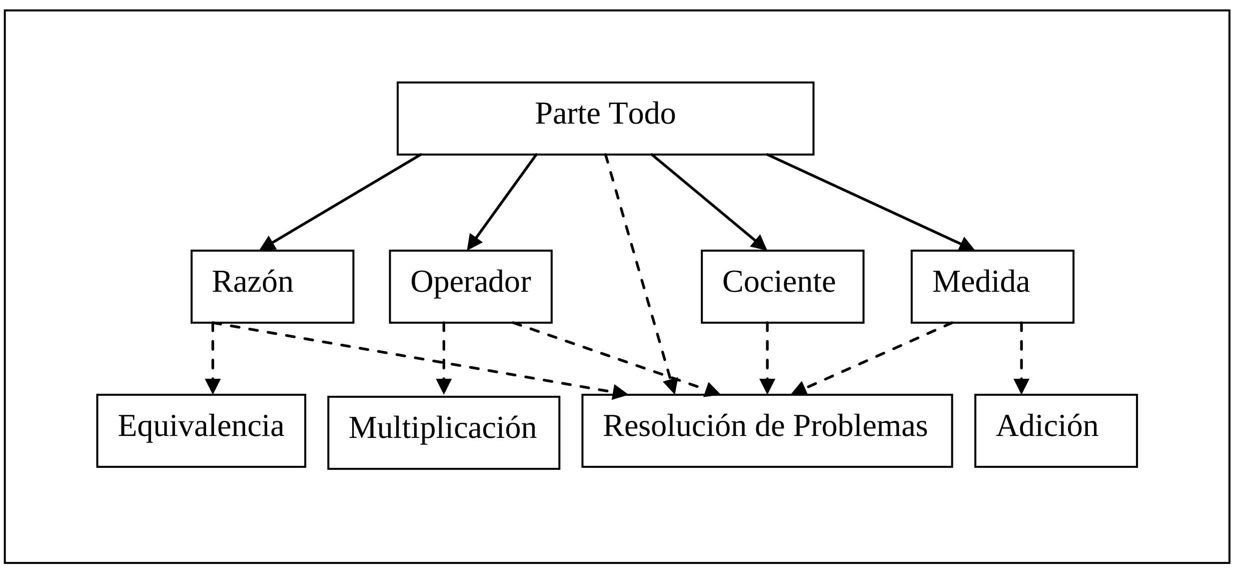


Figura 1. Modelo Teórico de las cinco interpretaciones del concepto de fracción (Behr et al, 1983) citado en Castellón (2008).

A continuación se presenta una breve definición de cada una de las interpretaciones de las fracciones

2.3.1 La fracción como parte – todo

La fracción se considera como un todo continuo o discreto subdividido en partes iguales indicando fundamentalmente la relación que existe entre el todo y un número designado de partes. Bajo esta perspectiva se considera que el numerador debe ser menor que el denominador. Esta es una de las interpretaciones más comunes de las fracciones y se considera la base para entender las demás, la prioridad se le da porque esta ocupa gran importancia en los planes de estudio de diversos países (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007; Clarke, Roche y Mitchel, 2007; Kieren 1980 citado en Valdemoros, 2004).

Lamon (2007) opina que si los niños desarrollan un entendimiento claro de esta interpretación se les facilitará el estudio de la equivalencia de fracciones, la suma y resta de fracciones, también hace mención que esta interpretación de fracción no proporciona un camino directo para entender la multiplicación ya que considera difícil trabajar con fracciones usando el lenguaje parte – todo y luego pensar en multiplicarlas.

Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) identifican tres situaciones que el estudiante debe entender:

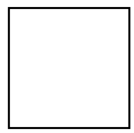
- Las partes juntas deben de ser igual al tamaño del todo
- Poder dividir el todo en partes iguales
- Las relaciones entre el todo y las partes se conserva sin tener en cuenta el tamaño y la forma.

Al respecto Lamon (2007) piensa que matemáticamente y psicológicamente la interpretación parte – todo no es suficiente para fundar el sistema de números racionales (citado en Clarke, Roche y Mitchel, 2007).

Un ejemplo de esta interpretación presentado a continuación usado por Valdemoros (2004) en su estudio, en el que se espera que el estudiante entienda que las partes en que un todo esta dividido son iguales, de la misma manera Lamon (2006) hace hincapié en la importancia que tiene desarrollar la idea de dividir en las edades tempranas, lo que le permitirá al estudiante poder encontrar la diferencia entre fracciones con denominadores comunes.

Ejemplo:

Cinco amigos se proponen pintar en común un muro como este:



¿Cómo se podría distribuir equitativamente el trabajo a realizar? Indícalo en el dibujo de arriba

Así a cada amigo le corresponderá pintar ___________del muro

Figura 2. Parte – todo (Valdemoros, 2004 Pág. 240)

2.3.2 La fracción como razón

Es considerado como la comparación numérica entre dos magnitudes o cantidades (Kieren 1980, citado en Perera y Valdemoros, 2007; Clarke et al., 2007; Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007; Chamorro 2003). Se usa comúnmente con la idea de proporción, esta interpretación no recibe la prioridad debida en el plan de estudios escolar (Clarke et al., 2007).

Lamon (2006) opina que no hay ninguna razón para no desarrollar el estudio de las proporciones desde la escuela ya que el niño usa estas compartiendo y comparando situaciones.

En esta interpretación el estudiante debe comprender que en una proporción cuando las dos cantidades se multiplican por el mismo número entonces la proporción se mantiene.

Marshall (1993) citado en Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) considera que esta interpretación es necesaria para el desarrollo de equivalencia de fracciones.

Un ejemplo de esta interpretación es el usado por Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) en su estudio, se utiliza la tarea del jugo de naranja para evaluar la comprensión de la proporción.

Los estudiantes deben entender la relación existente entre la cantidad de jugo concentrado y la cantidad de agua, y que la proporción entre dos cantidades se mantiene.

Ejemplo:

John y Mary están preparando el jugo de naranja para su fiesta. Se presenta a continuación la receta que ellos usaron: Receta de Mary: Cuatro tazas de jugo de naranja concentrado y ocho tazas de agua Receta de Jhon: Dos tazas de jugo de naranja concentrado y cinco tazas de agua ¿Qué receta tendrá más sabor a naranja? ¿Por qué?

Figura 3. Razón (Adaptado de Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007; Castellón 2008)

2.3.3 La fracción como operador

Se entiende como un transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto, esta transformación se puede pensar como la ampliación o la reducción de un número (Kieren, 1980, citado en Perera y Valdemoros, 2007). Por su parte Behr et al. (1993) analizan que esta interpretación se puede ver de dos formas diferentes: stretcher/shrinker y como un duplicator/partition-reductor, la diferencia entre las dos es que el stretcher/shrinker la transformación de la fracción produce el mismo número de unidades de tamaños diferentes por ejemplo ($\frac{3}{4}$ debe interpretarse como 3 x [$\frac{1}{4}$ de una unidad]),mientras que la duplicator/partition-reductor el resultado de la fracción se obtiene un número diferente de unidades del mismo tamaño por ejemplo (1/4 x [3 unidades]).

Al respecto Lamon (1999) citada en Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) define operador como transformador que alarga o acorta segmentos de una línea, aumento o disminución de un juego de objetos discretos. Chamorro (2003) menciona que la interpretación de la fracción como operador se apoya en el significado de función. Un número racional actuando sobre una parte, un grupo o un número modificándolo.

En el proceso de enseñanza aprendizaje de esta interpretación se han encontrado algunas dificultades, según el NCTM (2000) los estudiantes presentan problemas conceptuales precisamente en la multiplicación y división de fracciones, siendo de esta manera que cuando se dan situaciones en las que hay que dividir o multiplicar fracciones no pueden identificar que deben hacer. Otro problema es el concepto erróneo que se maneja con la multiplicación, cuando se piensa que esta siempre hace mas grande y la división hace más pequeño lo que es muy común, la causa puede ser la falta de experiencias en donde se usen las fracciones como operadores (Clarke, et al., 2007).

A continuación se ilustra la aplicación de esta interpretación con un ejemplo, para dar solución a este problema dependerá de que el estudiante domine el proceso.

Tito tiene $1\frac{2}{5}$ tarjetas de baloncesto de las que tiene Mario. Mario tiene 55 tarjetas ¿Cuántas tarjetas tiene Tito?

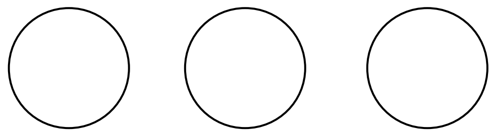
Figura 4. Operador (Adaptado por Lamon, 2006) citado en Castellón (2008)

2.3.4 La fracción como cociente

Se define como el resultado de dividir uno o varios objetos entre un número de personas o partes (Chamorro, 2003; Kieren, 1980, citado en Perera y Valdemoros, 2007). También puede concebirse como el valor numérico de la expresión a/b. Según Lamon (2007) para obtener una mejor comprensión de esta interpretación se deben desarrollar actividades desde edades tempranas. Al respecto Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) establecen que el estudiante específicamente debe entender que en la expresión a/b el dividendo se refiere al número de partes en cada porción y el divisor al nombre de partes en cada porción. El numerador puede ser más grande o más pequeño que el denominador.

Valdemoros (2004) usó en su estudio la tarea de galletas (figura 5) para evaluar que los estudiantes entienden esta interpretación. En la que se evidenciaron diversas dificultades en la equipartición de las galletas.

Cuatro niños van a comer tres galletas. Ayúdalos a repartírselas, de modo que a todos ellos les correspondan partes iguales.



Indica en las siguientes figuras como harán el reparto.

Escribe el nombre de cada niño junto alas partes que tu le asignarías

De esa manera, cada niño recibirá_______ de todas las galletas.

Figura 5. Cociente (Valdemoros, 2004)

2.3.5 La fracción como medida

Se define como la asignación de un número a una región o a una magnitud de una, dos o tres dimensiones, producto de la partición equitativa de la unidad (Kieren, 1980 citado en Perera y Valdemoros, 2007). Chamorro (2003) define esta interpretación como la relación entre una parte y un todo (sea este continua o discreta). Esta interpretación implica las nociones de la unidad y subintervalos, equivalencia y la idea de densidad de los números racionales (Lamon, 2007).

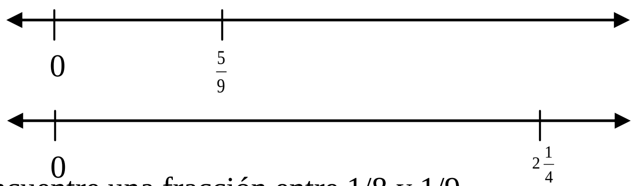
La enseñanza de la recta numérica se ha identificado con esta interpretación donde se muestra el número de partes iguales en que se puede dividir la unidad y ésta puede variar, esto depende del número de particiones (Clarke, et al., 2007; Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007). A la vez mencionan que el estudiante debe ser capaz de localizar un número en la recta numérica y recíprocamente pueda identificar un número representado por un cierto punto en la recta.

Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) mencionan que los estudiantes enfrentan dificultades con la representación de fracciones en la recta numérica. Estos tienden a contar el número de marcas en lugar de los intervalos, no logran identificar una fracción si esta representada por una fracción equivalente.

Lamon (2007) afirma que los estudiantes que dominan la interpretación de medida pueden desarrollar nociones fuertes sobre la adición y sustracción de fracción.

En un ejemplo de esta interpretación usado por Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) en su estudio, se les pide a los estudiantes que ubique un valor con respecto a otro.

1. Coloque el número uno en cada uno de las rectas numéricas



2. Encuentre una fracción entre 1/8 y 1/9

Figura 6. Medida (Adaptado de Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007) citado en Castellón (2008).

Cada una de las interpretaciones antes mencionas se encuentran interrelacionadas, se puede verificar en el Modelo Teórico que propone Behr et al. (1983) (ver figura 1); en donde propone como estrategia para lograrlo la resolución de problemas, siendo esta muy importante ya que contribuye al desarrollo de una mejor comprensión y entendimiento del concepto de fracción.

A continuación se describe algunas situaciones de esta estrategia en las fracciones

2.4 Las fracciones y la resolución de problemas

En el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas se pretende que el estudiante desarrolle destrezas y habilidades para resolver problemas. El NCTM (2000) propone:

> La resolución de problemas constituye una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas y por eso no debería ser una parte aislada del programa de esta disciplina. Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas sino también una de las principales maneras de hacerlo. (Pág. 55)

Es necesario tener claro que significa un problema en matemáticas, para ello hay diferentes posiciones, para el caso Santos (1997) menciona que el problema está ligado con la relatividad de una persona cuando intenta resolver una situación, lo que para unos puede ser un problema para otros es una tarea fácil de resolver. Al respecto Shoenfeld (1985) define problema como "una tarea difícil para el individuo que esta tratando de hacerla" (citado en Santos 1997, Pág. 27).

Los problemas que un estudiante resuelve deben estar basados en contextos o experiencias familiares, escolares y de aplicaciones científicas o del mundo laboral, ya que esto brindará la oportunidad de solidificar y ampliar los conocimientos matemáticos que poseen. Es de suma importancia que los docentes desarrollen en sus alumnos la disposición para la resolución de problemas creando y manteniendo un ambiente de clase que los anime a explorar, arriesgarse, compartir casos, éxitos y hacerse preguntas unos con otros.

Tanto el Currículo Nacional Básico de Honduras como los principios y estándares del NCTM contemplan en las unidades de fracciones que el estudiante debe ser capaz de resolver problemas de la vida cotidiana, por lo que se ve evidenciada la importancia que tiene capacitar el alumno para que pueda interpretar y desarrollar cualquier situación que involucre fracciones.

La resolución de problemas surge como una estrategia didáctica propuesta por Polya (1965) haciendo una diferenciación entre dos tipos de problemas: rutinarios y no rutinarios. "En general se considera dentro de la categoría de problemas rutinarios a todo problema que se puede resolver ya sea sustituyendo simplemente nuevos datos en lugar de los de un problema ya resuelto, ya sea siguiendo paso a paso sin ninguna originalidad, la traza de algún problema viejo" (Pág. 163); con esta definición se puede decir que problemas no rutinarios son aquellos que no se encuentran dentro de esta categoría, es decir una situación que el individuo trata de resolver haciendo uso de sus conocimientos es decir trazando su propia ruta.

Polya opina que los problemas rutinarios pueden ser útiles en la enseñanza de las matemáticas, pero considera imperdonable proponer a los alumnos problemas exclusivamente de este tipo limitándolos a una matemática mecánica.

Para resolver un problema según Polya se deben seguir 4 grandes etapas:

- Comprender el problema

- Concebir un plan
- Ejecución del plan
- Visión retrospectiva

En cada una de estas etapas el papel del docente es fundamental ya que este es un guía que orienta el proceso. Comprender el problema significa leerlo cuidadosamente e identificar los datos y la incógnita. Con frecuencia se traza un plan, si se puede y es necesario se vale de una figura o un grafico, periódicamente se debe evaluar los progresos para ver si es el camino es correcto de lo contrario se adopta otro camino o plan, el papel que desempeña el docente en este paso es tratar de conducirlo o guiarlo a tomar la mejor decisión pero evitando imponerse. Una vez que el estudiante ha concebido el plan el siguiente paso es ejecutarlo y obtener la solución. Luego es recomendable hacer una revisión del problema y reconsiderar dicha solución lo que permitirá al estudiante consolidar sus conocimientos, comprobar si puede encontrar otro camino para resolverlo y desarrollar habilidades y aptitudes en la resolución de problemas.

Esta actividad debe ser aprovechada por el docente de la mejor manera para que el estudiante se apropie del desarrollo de la clase y pueda haber un ambiente de confianza y seguridad en la misma, Polea (1965) sugiere algunas preguntas que se pueden implementar en la clase mientras se desarrolla la resolución de problemas por ejemplo: ¿Cuáles son los datos?, ¿Qué se requiere? ¿Se ha encontrado con un problema semejante?, ¿Podría enunciar el problema de otra forma?, ¿Ha empleado todos los datos? ¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede verificar el resultado?, ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿Puede usted emplear el método en algún otro problema? (Pág. 19)

Una de las tareas del docente más importantes y nada fáciles en este proceso es ayudar a los alumnos, según Polya (1965) se requiere tiempo, práctica, dedicación y buenos principios. Si el estudiante presenta dificultades se le debe de ayudar discretamente sin imponerse tratando de comprender lo que está pasando por su mente, planteando preguntas o indicándole algún camino que pudiese ocurrírsele al mismo alumno.

Al respecto Schoenfeld (1992) presenta una caracterización de las dimensiones o categorías que explican el éxito o fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas:

a). El conocimiento o recursos básicos que incluye definiciones, hechos, formulas, algoritmos y conceptos fundamentales asociados con un dominio matemático particular o tema.

b). Estrategias cognitivas o heurísticas que involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución. Algunos ejemplos de estas estrategias son dibujar un diagrama, buscar un problema análogo, establecer submetas, descomponer el problema en casos simples, etc.

c). Las estrategias metacognitivas que involucran conocimiento acerca del funcionamiento cognitivo propio del individuo (¿Qué necesito? ¿Cómo utilizo ese conocimiento?), y estrategias de monitoreo y control del propio proceso cognitivo (¿Qué estoy haciendo? ¿Por qué lo hago? ¿A dónde voy?)

d). Las creencias y componentes afectivos que caracterizan la conceptualización del individuo acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, y la actitud y disposición a involucrarse en actividades matemáticas. (Citado en Santos, (s/f) Pág. 5)

Schoenfeld (1992) al igual que Polea(1985) sugiere una serie de actividades que se deben hacer mediante este proceso entre ellas menciona que se debe ayudar a los estudiantes a desarrollar un gran número de estrategias de resolución de problemas más específicas, utilizar estrategias de monitoreo que permitan a los estudiantes aprender cuándo pueden utilizar estrategias apropiadas y el contenido matemático relevante en la resolución de problemas, y desarrollar formas que solidifiquen las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, la resolución de problemas, y sobre sus propias competencias o formas de interactuar con situaciones matemáticas.

2.5 Estrategias presentadas por los estudiantes en la solución de problemas que involucren fracciones

El modelo teórico de las cinco interpretaciones del concepto de fracción proporciona elementos que ayudan a conocer y comprender las estrategias que utiliza el estudiante y los errores que presenta en el desarrollo de ejercicios y problemas que involucran fracciones. Tratando de encontrar la solución a dichos problemas ellos desarrollan sus propias estrategias, para darle sentido y significado a sus respuestas y poder trabajar con las fracciones según (Solé y Coll, 1999 citado en Perera y Valdemoros 2007) los alumnos aprenden y se desarrollan en la medida en que construyen significados.

Algunos investigadores en los estudios hechos acerca de esta situación logran clasificar las estrategias usadas por los estudiantes en el desarrollo de problemas con fracciones. Behr et al., (1985) categorizan las estrategias cognoscitivas que los estudiantes usaron según sus respuestas. Las categorías se crearon basándose en el uso de estimación, orden de las fracciones, conceptos de equivalencia, y el uso correcto o incorrecto de algoritmos. Las categorías son:

1. Comparación correcta de puntos de referencia: el uso de referencias es el rasgo principal de esta estrategia. El uso de equivalencia y relación de orden de números racionales era evidente, mediante la recta numérica los estudiantes compararon fracciones basándose en la posición. Por ejemplo identificaban cuáles fracciones eran más pequeñas que la unidad, cuáles fracciones están entre ½ y 1. el alumno podía establecer estimaciones como ser que 1/3 +1/2 están cerca de uno.
2. Cálculo de algoritmos mentales: el uso de equivalencia de fracciones y orden de los números racionales también era evidente en esta estrategia, ya que al tener las fracciones con un común denominador el alumno solo se preocupa por el numerador y es mas fácil de resolver. Por ejemplo para determinar la suma de dos fracciones, encuentran un común denominador haciendo uso de las fracciones equivalentes.
3. La Comparación incorrecta del punto de referencia: los estudiantes podían usar referencias pero establecían relaciones incorrectas.

4. Cálculo algorítmico mental basado en un algoritmo incorrecto: en esta categoría el estudiante usó cálculos mentales basados en algoritmos incorrectos. Por ejemplo en la suma de dos fracciones de diferente denominador. 5/3 + 7/5 = 12/8.
5. Estimación Gruesa: El estudiante da una estimación sin usar puntos de referencia y fracciones equivalentes.

Lamon (2006) resumió las estrategias que utilizaron los estudiantes de la siguiente manera:

1. Partes de igual tamaño (SSP, por sus siglas en ingles) es cuando la fracción es dividida en el mismo número de partes es decir con un común denominador, de esa forma pueden establecer la fracción con mayor numerador por ejemplo (5/3 < 8/3).
2. Igual número de partes (SNP, por sus siglas en ingles). Se trata de comparar las fracciones cuando los numeradores son iguales pero los denominadores son diferentes, el número más grande en el denominador indica la fracción más pequeña. Ejemplo: (8/9> 8/15).
3. Comparando el punto de referencia (CRP, por sus siglas en ingles). Se trata de comparar fracciones de numeradores y denominadores diferentes utilizando un punto de referencia como 1, ½, ó ¼. Por ejemplo (3/4>1/2) ó (2/9<1/2).

Como se puede ver algunas de las estrategias presentadas por Lamon están relacionadas con las que presentó Behr et al. (1985) entre ellas, el uso de puntos de referencia para resolver problemas de relación de orden y otros. También es muy importante que el estudiante desarrolle habilidades y destrezas en la equivalencia de fracciones y en la utilización de la recta numérica ya que esto juega un papel esencial en la comprensión del concepto de fracción.

Strenfland (1993) citado en Perera y Valdemoros (2007) menciona que el maestro juega un papel importante en el desarrollo de las estrategias en sus estudiante ya que puede ser un guía propiciando confrontaciones constructivas en los alumnos en situaciones que sean relevantes; también señala que el proceso de enseñanza aprendizaje debe apegarse a la realidad para que dicho conocimiento tenga un significado para el niño.

Al respecto Gofree (2000) citado en (Perera y Valdemoros, 2007) opina que

El proceso de construcción del conocimiento debe hacerse dentro de un marco de una educación matemática realista brindando numerosos fundamentos didácticos dentro de los cuales menciona:

a. Diseñar situaciones problemáticas concretas para que el [alumno] pueda dar sus propios significados.
b. Crear un modelo de una situación real, permitir que el estudiante investigue, e inducirlo a que pueda utilizar el modelo para resolver otras situaciones.
c. Tomar en cuenta cualquier conflicto cognitivo que el niño haya pensado por si mismo para incluir la reflexión en la clase.
d. Propiciar en el aula la interacción entre los niños de manera natural.
e. Basar la enseñanza de la matemática en problemas del mundo real como fuente de ideas y citaciones para poder aplicarlos (Pág. 211).

Es de suma importancia tomar en cuenta los puntos anteriormente mencionados al momento de planificar y desarrollar una clase con un enfoque constructivista, especialmente cuando se busca lograr un aprendizaje significativo. Cuando el profesor conoce las estrategias que los estudiantes emplean para resolver problemas, este se siente identificado con sus estudiantes y es capaz de reconocer sus habilidades y dificultades. Así mismo, conocer los errores que cometen los estudiantes es una fuente de información que puede ser utilizada para diseñar actividades que contribuyan a erradicar esos errores y fortalecer los conocimientos. En la siguiente sección se resumen algunos errores comunes que han sido identificados en los estudiantes al trabajar con fracciones.

2.6 Errores que se pueden cometer los estudiantes al momento de resolver problemas que involucren fracciones

De la misma forma en que Behr (1985); Lamon (2006) concluyen en las estrategias que usan los estudiantes en el desarrollo de problemas que involucran fracciones, otros investigadores puntualizan en los errores más comunes presentados en la comprensión de tan importante concepto, entre los cuales se pueden identificar con mayor frecuencia la equivocación al momento de comparar fracciones con números enteros, sumando numeradores con numeradores y denominadores con denominadores (Flores y Kaylor, 2007), errores en la estimación de la suma y en la representación gráfica en la recta numérica (Charalambous Pitta-Pantazi, 2007).

Brown, G., y Quinn, R. (2006). Establecen algunos errores encontrados en sus estudios tales como:

a). Encontrar un común denominador.
b). Mal uso de algoritmos.
c). Demostración de conceptos erróneos en la relación de fracciones equivalentes con suma de fracciones.
d). Extensión lógica de la suma de números naturales.
e). Errores en el uso de fracciones cuyo denominador es cero.
f). Identificar qué operación de fracciones deben utilizar en la resolución de un problema.

Es común observar que el estudiante no diferencia los números enteros de las fracciones, estas dificultades conceptuales podrían hacer el proceso más difícil de entender las fracciones, ya que ellos tienden a aplicar algoritmos aprendidos en los números enteros cuando trabajan con fracciones.

Algunas diferencias entre los números enteros y fracciones necesitan ser establecidas para entender las dificultades que los estudiantes experimentan al pasar de un conjunto de números a otro. En los números enteros, la unidad se refirió siempre a un sólo objeto, pero en fracciones la unidad puede consistir en más de un objeto o podría ser una unidad compuesta (por ejemplo un paquete de seis galletas), además, en cada nueva situación la unidad puede ser diferente (Lamon, 2006). En los funcionamientos de números enteros, la multiplicación está relacionada con la suma y la división con repartir. Los estudiantes siempre asumen que la multiplicación hace los números más grandes y la división siempre hace los números más pequeños.

Dada esta situación los alumnos necesitan construir nuevos modelos para poder trabajar con fracciones y también para notar que algunas de las ideas (por ejemplo las reglas para la multiplicación) son diferentes a las que se aprendieron con los números enteros (Flores y Kaylor, 2007).

Lamon (2006) menciona que si los estudiantes tienen una comprensión clara de cada una de las interpretaciones del concepto de fracción podrán desarrollarse confiadamente en cualquier situación que involucre fracciones y podrán escoger las operaciones adecuadas a cada problema. Sabiendo esto en el futuro podrán utilizarlo al trabajar con los números racionales, los números reales, números complejos y todas las ideas matemáticas presentadas en cualquier otro contexto.

CAPITULO 3: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1 Tipo de investigación

El presente estudio es una investigación cualitativa de tipo exploratoria, sobre las concepciones matemáticas que poseen los estudiantes de séptimo grado acerca de las fracciones y sus diferentes interpretaciones; desarrollada durante el cuarto parcial 2009 en la Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio" (ENMPN).

Según Hernández S. (2006) éste método permite conocer las perspectivas y puntos de vista de los participantes, se interesa por los procesos y por el significado de las acciones humanas como ser sus experiencias, emociones entre otras.

3.2 Participantes en el proceso

La población fueron los estudiantes de séptimo grado de la Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio" (ENMPN) de la jornada matutina, los cuales se encontraban distribuidos en tres secciones: séptimo 1, 2 y 3. La muestra fue conformada por 14 estudiantes considerando las tres secciones, los cuales fueron seleccionados, por su disposición a participar en el estudio ya que era un trabajo extra clase y en jornada contraria. En el siguiente cuadro se detalla el número de estudiantes seleccionados por sección:

Cuadro No 1

Detalle de la muestra

Sección	Población	Muestra
1	48	4
2	50	6
3	50	4
Total	148	14

Fuente: Matrícula 2009 EMNPN

. La investigación se ejecutó en un período de dos meses: septiembre y octubre del año 2009.

3.3 Etapas del proceso

El estudio se llevó a cabo en dos etapas: una diagnóstica y otra de ejecución.

La etapa diagnóstica se realizó con un grupo de 56 estudiantes de séptimo grado, con el objetivo de determinar las habilidades, dificultades y errores que presentan al resolver situaciones que involucren fracciones y sus diferentes interpretaciones.

La etapa de ejecución se realizó con los 14 alumnos seleccionados, en jornada contraria, los días lunes y viernes dos horas cada día, pero a pesar de la situación que en este periodo se vivió, en donde las clases no eran regulares y los estudiantes se enfrentaban día a día con manifestaciones y otras situaciones que interferían , las sesiones de trabajo continuaban su curso normal, y en alguna semanas nos reuníamos los cinco días, ya que se contaba con la máxima voluntad y disponibilidad de parte del alumno y el padre de familia.

En esta etapa se analizó el desempeño de los estudiantes, con el propósito de explorar los conocimientos que poseen sobre fracciones, las dificultades, errores, avances y logros presentados durante el proceso; los alumnos se dedicaron a resolver guías de trabajo, de laboratorio y a desarrollar actividades lúdicas, algunas en equipo y otras en forma individual, bajo el enfoque de resolución de problemas.

3.4 Metodología de las sesiones de trabajo

Las sesiones de trabajo se desarrollaron en base a guías de laboratorio, hojas de trabajo y actividades lúdicas las cuales se distribuían por equipos y otras en forma individual.

En las guías se les presentaban problemas que involucran el uso de las fracciones cuya lectura y comprensión lo hacían al interior de cada equipo si esta era en grupo, cada uno si era en forma individual, luego procedían a la discusión y apoyo entre ellos, hasta llegar a la verificación de los resultados y así obtener una mejor comprensión de cada una de las interpretaciones.

El papel que realizó la profesora, consistió en observar el proceso de desempeño de los estudiantes, y apoyarlos en los casos que lo ameritaban, teniendo el cuidado siempre de no proporcionar la respuesta si no mas bien de hacer preguntas o comentarios que los hicieran reflexionar y profundizar en los detalles del problema, y de esa forma despejaran sus dudas y encontraran la solución.

En el desarrollo de las guías se les proporcionaba el tiempo necesario para ello, luego se realizaba una discusión con todo el grupo con el objeto de resumir las diferentes estrategias implementadas por ellos, algunos errores cometidos y establecer conclusiones.

3.5 Metodología Empleada en la Recolección de la Información

El tipo de instrumento utilizado y la metodología implementada estuvo en función de cada una de las dos etapas en que se realizó el estudio:

3.5.1 Etapa Diagnóstica

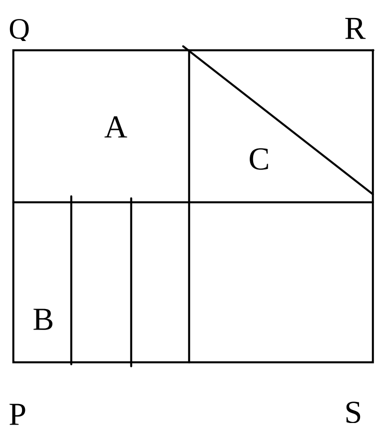
En esta etapa se recolectó la información necesaria para determinar los conocimientos previos que los estudiantes poseen, las estrategias implementadas y los errores que cometen al resolver problemas que involucran fracciones. Para ello se diseño una prueba diagnóstico conformada por 10 problemas orientados a evaluar el manejo de las tres interpretaciones del concepto de fracción (parte–todo, medida, operador), haciendo una distribución de dos problemas para la interpretación parte – todo y operador y 5 para medida.

Para aclarar un poco más sobre las cuatro interpretaciones del concepto de fracción tomaré un ejemplo de cada una de ellas que conformaba la prueba diagnóstica:

a) Parte – todo

Con este problema se pretendía que el estudiante fuera capaz de identificar las fracciones que representa cada una de las letras en el rectángulo grande, es decir que pueda dividir un todo en partes iguales

1. Dado el siguiente rectángulo PQRS como la unidad indique la fracción que representa cada letra



A___________

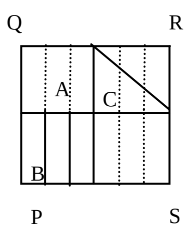
B___________

C ___________

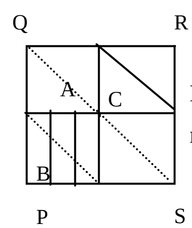
Para resolver este problema se debe implementar la estrategia de dividir el rectángulo en las partes que indican las letras A, B, C, cada una en su momento. Analicemos una de las posibles soluciones:

Para encontrar la fracción que representa la letra A se debe considerar lo siguiente: el rectángulo PQRS esta dividido en cuatro rectángulos iguales al que representa A, por lo tanto A es igual a ¼, ya que el denominador es las partes en que se divide la unidad y el numerador son las partes que se toman.

En el caso de B y C no es tan evidente la fracción que se representan, por lo que se debe dividir todo el rectángulo para poder visualizarlas, o simplemente contar en cuantas partes del tamaño de B y C quedaría dividido en el rectángulo grande. Para el caso las siguientes figuras explican la estrategia que se puede seguir para encontrar B y C



La fracción que representa B es 1/20



La fracción que representa B es 1/8

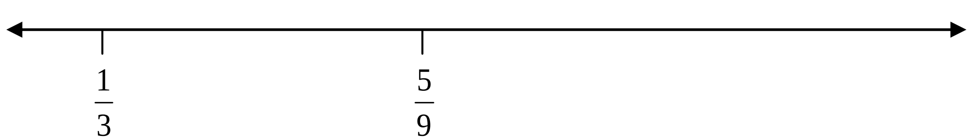
Cualquiera que sea la estrategia que el estudiante siga para llegar a la respuesta debe mostrar que tiene claro el concepto de fracción en su interpretación parte todo.

Sin embargo se puede presentar la posibilidad que el estudiante muestre algunos errores al momento de escribir la fracción que representa cada letra, para el caso mencionamos el siguiente como ejemplo: tomar cada cuadrito del tamaño A como una unidad, en ese caso podría concluir que la fracción que representa C es $\frac{1}{2}$ y B un $\frac{1}{4}$, entre otros.

b) Medida

En este problema se pretendía que el estudiante fuera capaz de ubicar una fracción en la recta numérica dados puntos de referencia

4. Encuentra dos fracciones ubicadas ente $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{9}$



Para poder ubicar la fracción se puede hacer uso de las fracciones equivalentes, de esta forma facilitar el proceso de búsqueda de la fracción que puede estar entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{9}$ por ejemplo $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$ y entre $\frac{3}{9}$ y $\frac{5}{9}$ se encuentra $\frac{4}{9}$. Esta es una de las estrategias posibles que pueden ser utilizadas por los estudiantes, o simplemente comparar las fracciones con $\frac{1}{2}$ como referencia y así encontrar que $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{9}>\frac{1}{2}$, por lo tanto $\frac{1}{2}$ está entre las dos fracciones. De igual forma puede suceder que se encuentre con dificultades para responder este problema y simplemente escriba al azar cualquier fracción, o comparar numeradores con numeradores y denominadores con denominadores para determinar una fracción mayor que $\frac{1}{3}$ o menor que $\frac{5}{9}$, por ejemplo $\frac{2}{7}$, con respecto a $\frac{5}{9}$ estaría bien pero con respecto a $\frac{1}{3}$ no. Este solo es un posible error.

c) Operador

En este problema se pretende que el estudiante sea capaz de identificar la operación que debe implementar para resolverlo

7. Si se utiliza $\frac{4}{5}$ litros de pintura para trazar un metro de línea ¿Cuántos litros de pintura se utilizarán para trazar 5 metros de línea?

Es claro que se debe utilizar la multiplicación de fracciones para poder encontrar cuantos litros de pintura se necesitan para los 5 metros de línea, pero no se descarta la posibilidad que la estrategia que algún estudiante pueda desarrollar sea la utilización de la suma. Por ejemplo $\frac{4}{5}\times 5=\frac{20}{5}=4$ ó $\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{20}{5}=4$. Así mismo puede ser que cometan errores uno de ellos puede ser que confundan la operación a aplicar y que en vez de que multipliquen hagan división.

3.5.2 Etapa de Ejecución:

Esta etapa se desarrolló en base a los resultados que se obtuvieron en la prueba diagnóstica cuyo propósito era la exploración de estrategias que los estudiantes utilizan para resolver problemas que involucren el concepto de fracción y sus interpretaciones, a la vez fortalecer el desarrollo de nuevas habilidades que contribuyan a erradicar los errores y las dificultades que pudieran ser presentadas durante el proceso.

La recolección de datos se llevó a cabo mediante experiencias realizadas en el aula de clases, bajo un enfoque constructivista, en donde el alumno utilizaba sus propios conocimientos para generar los nuevos, lo que provocaba una actividad cognitiva permanente en ellos.

Las clases que se desarrollaron se hicieron bajo la denominación de “Sesiones de Trabajo”, las cuales tenían una duración de dos horas pero cuando era necesario se extendían un poco más.

En el desarrollo de las sesiones de trabajo, se realizaban guías de laboratorio y guías de trabajo de las cuales, algunas se hacían en equipo y otras en forma individual, también se implementaron dos actividades de juego con el objeto de afianzar las interpretaciones del concepto de fracción.

En la elaboración de estás guías se tomó como material de apoyo los libros para la educación básica que fueron desarrollados por el Proyecto Mejoramiento en la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática (PROMETAM) que ejecuta la Secretaría de Educación, dentro de los cuales se encuentra una gran variedad de ejemplos y problemas que involucran fracciones en sus diferentes interpretaciones a partir de cuarto grado hasta séptimo.

En este estudio se desarrollo un total de 16 sesiones de trabajo, en las cuales se aplicaron los siguientes instrumentos, para registrar el trabajo realizado por los estudiantes.

3.6 Instrumentos empleados en la recolección de información

3.6.1 Guías de laboratorio: Durante el proceso se realizaron dos guías de laboratorio, una de ellas al inicio del estudio, es decir en la primera sesión de trabajo, cuyo objetivo era explorar los conocimientos que el estudiante tenía acerca del concepto de fracción y a la vez introducir la interpretación parte – todo. La segunda se realizó en la sexta sesión de trabajo, en la que se pretendía explorar los conocimientos previos acerca de fracciones equivalentes, afianzar la interpretación parte-todo e introducir la interpretación como medida. Cada guía involucraba el uso de material concreto y semiconcreto, el cual era proporcionado por la profesora.

Para el desarrollo de estas guías el grupo se organizó en 4 equipos de 3 integrantes cada uno y un equipo de 2 integrantes; en ellas se les planteaban diferentes situaciones experimentales, que generaban la participación activa de ellos, un ambiente de discusión y reflexión hasta llegar a concluir. Los acuerdos o conclusiones a las que llegaba cada equipo quedaron registrados en las respectivas guías.

3.6.2 Guías de trabajo: En este estudio se desarrollaron 8 guías de trabajo, la primera en equipo y las demás en forma individual, sin embargo al momento de resolver las guías individuales se apoyaban como equipo, es decir, discutían sus respuestas, despejaban sus dudas hasta llegar a un consenso, luego cada uno escribía la respuesta en sus guía bajo su propio criterio.

En cada guía se les planteaban diferentes situaciones problemáticas, encaminadas a fortalecer cada una de las interpretaciones del concepto de fracción, a la vez permitían registrar las estrategias, y los errores que el estudiante podría presentar durante el desarrollo de la misma.

La distribución de las guías se hizo en base a cada una de las interpretaciones del concepto de fracción, considerados en este estudio (parte todo, medida, operador). Para el caso en la interpretación parte- todo se desarrollaron 2 guías de trabajo, para medida se desarrollaron 3 guías, ya que en esta se involucran varios conceptos como ser fracciones equivalentes, representación de fracciones en la recta numérica, relación de orden y las operaciones de suma y resta, en el caso de la interpretación operador del concepto de fracción se realizaron dos guías.

En la última sesión de trabajo se realizó una guía similar al diagnóstico, con la que se pretendía evaluar el desempeño de los alumnos al resolver situaciones con fracciones, integrando las cuatro interpretaciones. Por lo que se esperaba que en esta fase no se presentaran dificultades y se pudiese resolver los problemas de cada interpretación, utilizando diversas estrategias desarrolladas durante el proceso.

3.6.3 Juegos: La actividad de los juegos se hizo en dos momentos, el primero llamado juego de cartas se llevo a cabo cuando se había desarrollado el tema de fracciones equivalentes, con el objetivo de afianzar en el estudiante este concepto, el segundo llamado retorno de fracciones se hizo con el propósito de afianzar la suma. Ambos juegos contribuyen a fortalecer la interpretación de medida.

Para su ejecución el grupo se dividió en equipos de 4 integrantes cada uno para el primer caso; y en equipos de 2 para el segundo juego; se les entregaron los materiales necesarios y las instrucciones del juego; el papel de la maestra era el de observador prestando atención al desempeño de cada equipo y apoyando si era necesario.

Durante el desarrollo de las sesiones de trabajo los estudiantes fueron filmados con el objeto de poder registrar los procesos, a través de estos se logró dejar evidencia de algunas discusiones en los grupos y de las participaciones de los estudiantes durante el desarrollo de las sesiones de trabajo, así mismo de las intervenciones de la profesora.

En los videos se puede apreciar con claridad las discusiones o reflexiones que los alumnos hacían hasta llegar a la conclusión; lo que facilitó el análisis de los resultados.

También se llevó a cabo un registro en notas como especie de diario del investigador, en donde la profesora escribía comentarios de hechos relevantes o reflexiones que se presentaban durante cada una de las sesiones.

En el siguiente cuadro se describen brevemente los instrumentos que se aplicaron por cada interpretación:

Cuadro No2

Instrumentos aplicados durante el estudio por interpretación

Interpretación	**Instrumento**	**Descripción**
Parte – todo	Guía de laboratorio #1	Introducción del concepto de fracción
	Guía de trabajo # 1	Utilización de material (hexágonos)
	Guía de trabajo # 2	Partes de una fracción Dividir un todo en partes iguales
Medida	Guía de trabajo # 3	Clasifica fracciones, representa fracciones en la recta numérica
	Guía de laboratorio # 2	Identifica fracciones equivalentes
	Juego: Cartas de fracciones	Fracciones equivalentes
	Guía de trabajo # 4	Encuentran fracciones equivalentes
	Juego: El retorno de las fracciones	Representación en la recta numérica, suma y resta.
	Guía de trabajo # 5	Problemas de suma y resta de fracciones
Operador	Guía de trabajo # 6	Resuelve problemas de multiplicación de fracciones
	Guía de trabajo # 7	Resuelve problemas de división de fracciones
Evaluación	Guía de trabajo # 8	Resuelve problemas integrando las tres interpretaciones vistas

Fuente: Elaboración propia

3.7 Procedimiento del Análisis

El análisis de los resultados en este estudio se realizó haciendo un énfasis en las tres interpretaciones del concepto de fracción: parte –todo, medida y operador, ya que era de interés saber si los estudiantes dominaban cada una de ellas, a la vez explorar las estrategias utilizadas y errores cometidos en cada una de las interpretaciones antes mencionadas, así mismo las dificultades presentadas en el proceso.

En la etapa diagnóstica se incorporaron problemas relacionados con cada una de las interpretaciones del concepto de fracción. El análisis se hizo describiendo las estrategias y errores que los estudiantes presentaban al desarrollar problemas con fracciones. Al finalizar se determinó un porcentaje de estudiantes que describía los que contestaron en forma correcta e incorrecta, haciendo un análisis cualitativo de sus respuestas, en busca de una explicación más profunda del porque contestaban correcta e incorrectamente, tratando de identificar estrategias y errores comunes.

En la etapa de ejecución se desarrollaron actividades en las cuales se pretendía que el estudiante reforzara sus conocimientos y adquiriera nuevas habilidades específicamente en la resolución de problemas con fracciones y sus interpretaciones. En esta fase se observó el proceso y desempeño de los alumnos en el trabajo de equipo e individual al momento de desarrollar las guías de trabajo, de laboratorio y de juegos.

El análisis de los resultados se hizo por cada interpretación (parte- todo, medida y operador) tomando los problemas del diagnóstico, las guías ya sea de trabajo, de laboratorio o de juego, que estaban relacionadas con cada una de ellas. En el caso de la última guía de trabajo que se aplicó, su análisis se llevó a cabo, como una forma de valorización del desarrollo de todas las sesiones de trabajo, ya que en esta guía se incorporaron situaciones problemáticas con la temática que fue abordada durante todo el proceso.

CAPITULO 4: PRESENTACIÓN Y ANÍLISIS DE RESULTADOS

En el proceso de investigación se desarrollaron dos etapas, la diagnóstica y la de ejecución, sin embargo el análisis de los resultados se presenta según las tres interpretaciones del concepto de fracción descritas anteriormente (parte-todo, medida y operador); se combina las dos etapas, analizando los datos del diagnóstico en forma cualitativa, para cada una de las interpretaciones; y a la vez las guías que se aplicaron en cada una ellas, siempre realizando análisis cualitativo, en donde el desempeño de los estudiantes durante el proceso conforman los datos obtenidos, los cuales fueron contrastados con la fundamentación teórica que orientó esta etapa.

A continuación se detalla de una forma más específica y profunda el desempeño y la comprensión lograda por el estudiante en cada una de las interpretaciones del concepto de fracción, las estrategias usadas, los errores y dificultades encontradas durante el proceso.

4.1 Parte – todo

La prueba diagnóstica (ver anexo 1) se aplicó a 56 estudiantes de séptimo grado de la jornada matutina de la ENMPN, con ella se pretendía determinar las estrategias y los errores que los estudiantes cometían al desarrollar problemas con fracciones.

La prueba diagnóstica contenía 2 problemas sobre la interpretación parte- todo, en los cuales se pretendía explorar la comprensión que tenían los estudiantes sobre esta interpretación, tomando como base las tres situaciones que propone Charalambous y Pitta-Pantazi (2007): las partes juntas deben de ser igual al tamaño del todo, poder dividir el todo en partes iguales, las relaciones entre el todo y las partes se conserva sin tener en cuenta el tamaño y la forma; aspectos que fueron considerados no solo en la etapa diagnóstica sino también durante la etapa de ejecución de esta interpretación.

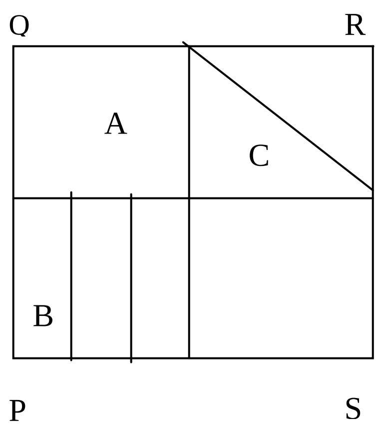
Haciendo un análisis en forma general se puede apreciar que la mayoría de los estudiantes no tienen clara esta interpretación, ya que solamente 3 de los 56 alumnos (5%) respondieron correctamente los dos problemas que involucran la interpretación parte – todo; lo que significa que los demás lograban responder uno de ellos, ninguno o simplemente lo dejaban en blanco;

por lo que se puede afirmar que aunque esta interpretación es una de las que se le da más énfasis en los programas de estudio del nivel primario, los estudiantes no logran comprenderla. Para tener una mejor visión del rendimiento de los estudiantes se expone a continuación un análisis del desempeño del alumno en cada uno de los problemas propuestos.

4.1.1 Problemas de la prueba diagnóstica

Problema # 1

Dado el siguiente rectángulo PQRS como la unidad, indique la fracción que representa cada letra



A___________

B___________

C ___________

Los resultados obtenidos se presentan en el cuadro No 2

Cuadro No 3

Resultados del Problema #1

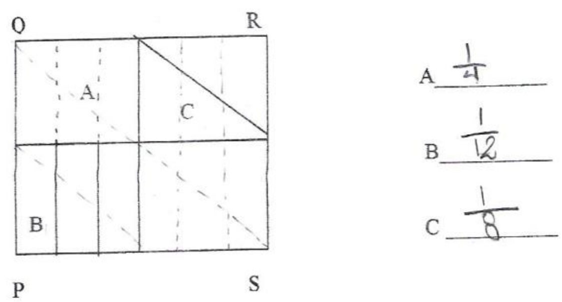
Reactivo / Respuestas	1.A	1.B	1.C
Correcta	10	3	3
Incorrecta	38	45	45
En blanco	8	8	8

Este problema tenía como objetivo determinar si el estudiante podía dividir un todo en partes iguales, a la vez identificar la fracción que representa cada parte en que está dividido el rectángulo.

Es evidente que los estudiantes presentan serias dificultades para resolver el problema; siendo 38 estudiantes (67%) que respondieron en forma incorrecta la fracción que representa la letra A y un (80%) de los estudiantes encontraron mayor dificultad en identificar la fracción que representa la letra B y C en el rectángulo; considerando también que el 14% de ellos dejaba en blanco esta pregunta.

Uno de los errores más frecuentes encontrados en este problema era identificar la unidad, es decir que para escribir la fracción que representa la letra B y C consideraban como unidad el cuadro que representa ¼ del rectángulo, ya que este no lo consideraban como el todo, lo que significa que no tienen claro que las relaciones entre el todo y las partes se conserva sin tener en cuenta el tamaño y la forma tal y como lo afirma Pitta-Pantazi (2007), como uno de los elementos necesarios que demuestran que el estudiante entiende esta interpretación .

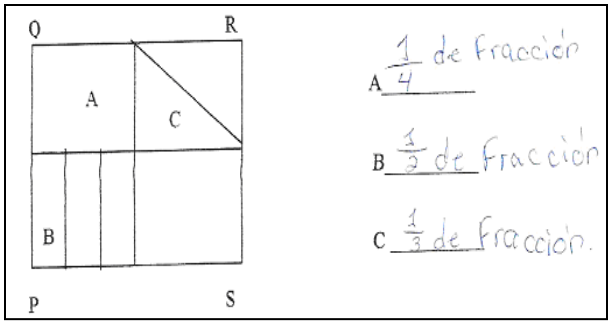
A continuación se presenta un ejemplo de la respuesta un alumno que lo hizo en forma correcta:



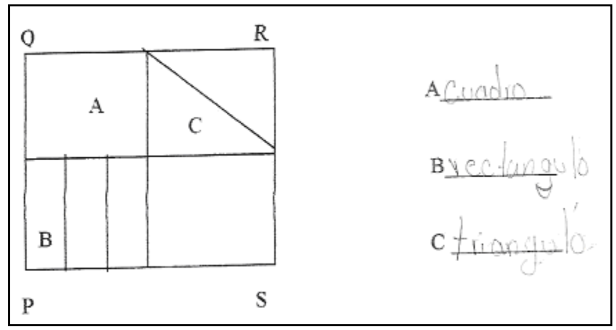
Está claro que la estrategia que el estudiante utilizó es dividir el diagrama de acuerdo al tamaño de figura que representaba cada letra, llegando a la conclusión que B cabe 12 veces en el rectángulo por lo tanto es la fracción $\frac{1}{12}$, y de la misma forma lo hizo con la figura de la letra C, por lo que contestó correctamente la pregunta, y en este caso se puede decir que si tiene claro el concepto de fracción en su interpretación **parte-todo**. Sin embargo estamos refiriéndonos a un caso en particular ya que los datos antes mencionados nos reflejan que la mayoría no lo ha logrado.

De igual manera se da a conocer dos errores encontrados con mayor frecuencia:

Error 1



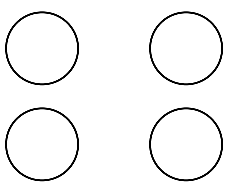
Error 2



En el error uno anteriormente se explica las razones por las que el estudiante responde de esta forma, en el caso del error 2 se puede observar que el estudiante responde con la figura que representa cada inciso y no con la fracción.

Problema # 2

Estas canicas representan las dos terceras partes de las que posee Roberto. Dibuja las canicas que faltan para completar la colección de Roberto



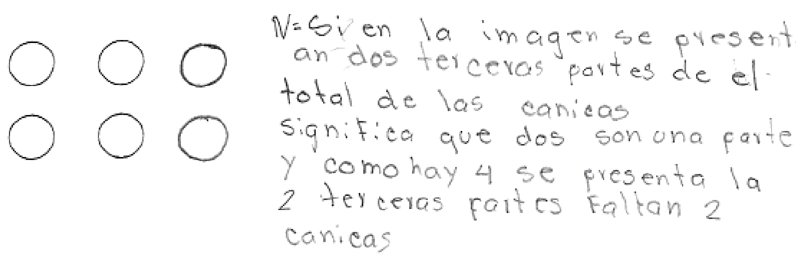
Los resultados se muestran en el cuadro No 3:

Cuadro No 4

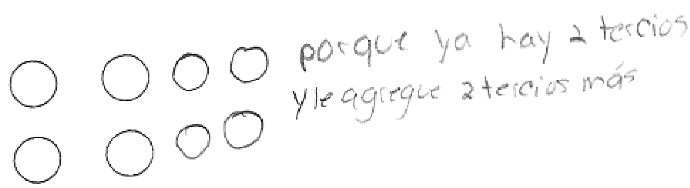
Resultados del Problema #2

Reactivo / Respuestas	2
Correcta	35
Incorrecta	15
En blanco	6

Con este problema se pretendía que los estudiantes pudieran utilizar las fracciones para completar la unidad, es decir de las partes llegar al todo, en donde se tenía que identificar que cada dos canicas conformaban 1/3 de la colección de Roberto. En el cuadro No. 2 se puede apreciar que la mayoría (62%) respondió en forma correcta, ya que dibujaron exactamente las dos canicas que faltaban para completar la colección, esto significa que ellos lograron comprender la relación existente entre el todo y las partes; sin embargo 15 de los estudiantes (26%) lo hicieron incorrectamente, dibujaron varias canicas, lo que da la impresión que estaban adivinando y no tenían idea de lo que escribían y otros simplemente no contestaron.
A continuación se ilustra una de las respuestas correctas realizada por una alumna:



Igualmente se presenta una respuesta incorrecta que planteó un alumno:



En la justificación que proporciona el estudiante da cierta evidencia para poder concluir que no sabía como completar la unidad, ni cuántas canicas conforman 1/3.

Después de realizar el análisis de los problemas del diagnóstico considerados para esta interpretación se procede a analizar de forma cualitativa las guías que fueron aplicadas para afianzar esta interpretación, en donde se detalla los logros y dificultades presentados por el estudiante durante su desarrollo.

4.1.2 Guía de laboratorio #1

Con esta guía (ver anexo 2) se tenía como objetivo introducir el concepto de fracción, específicamente en la interpretación parte todo, considerando los conocimientos previos de los estudiantes obtenidos en la educación primaria.

Al desarrollar esta guía se pretendía que el equipo de trabajo integrado por tres estudiantes pudiese deducir el concepto de fracción al momento de resolver situaciones que están relacionadas con sus propias vivencias, y al mismo tiempo contribuir a eliminar las dificultades que se reflejaron en la prueba diagnóstica; para su desarrollo se utilizó material concreto y semiconcreto, en este caso se uso la cinta métrica y tiras hechas de cartulina de color amarillo, rojo y azul, las cuales tenían una medida de 1 metro de largo por 5 centímetros de ancho, con el propósito de que ellos pudieran dividirlas en partes iguales, establecer la relación entre el todo y las partes, y representar a través de una fracción cada una de las partes que conforman el todo.

A continuación se detalla cada una de las actividades de la guía con sus respectivos reactivos

Actividad #1

Tome una de las cintas de cartulina de color amarillo y divídala en tres partes iguales. Recorte cada parte.

1. ¿Cuántas veces cabe una cinta amarilla en la cinta azul? Explique el procedimiento que usó para llegar a la respuesta
2. ¿Qué parte del metro representa la cinta amarilla? Represéntelo con un número fraccionario
3. ¿Cuál es la medida de cada cinta amarilla con respecto al metro? Explique:
4. Si utilizamos dos cintas amarillas ¿qué parte del metro están representando? represéntelo con un número fraccionario

Con los cuatro incisos de la actividad #1 se pretendía que el estudiante lograra dividir un todo en partes iguales, y poder representarlas a través de una fracción, de manera que establecieran la relación entre cada parte con respecto a la unidad.

En las preguntas 1,3 y 4 las respuestas no variaron; los cinco equipos concluyeron que la cinta amarilla cabía tres veces en la cinta azul, ya que estas tienen la misma medida, de igual manera contestaron el inciso 3 en la que todos realizaron la división $100 \div 3$, ya que un metro equivale a cien centímetros y este había sido dividido en tres partes, por lo que la medida de cada cinta amarilla era aproximadamente 33.3 centímetros.

Con respecto al inciso 2 uno de los equipos respondió de la siguiente forma:

La cual es correcta y es una de las estrategias que se esperaba fuera implementada por los estudiantes. Los demás equipos dieron respuestas similares, sin embargo se presentó la dificultad en otro de los equipos, en donde una alumna confundía la pregunta 2 con la pregunta tres y no entendía como representar la cinta amarilla a través de una fracción, pero en la discusión surgió la opinión de una alumna, quien les explica haciendo uso de la cinta amarilla, midiéndola en la cinta azul, llegando a la conclusión que la amarilla es la tercera parte de la azul, por lo tanto se podía representar con $\frac{1}{3}$. Una vez que lograron responder este inciso no hubo ningún problema para contestar el inciso 4, ya que esta es similar al inciso 2, por lo que todos los equipos contestaron que dos cintas amarillas representan $\frac{2}{3}$ del metro.

Seguidamente se les asignó la actividad #2 en donde se buscaba que los estudiantes comprendieran la relación entre el todo y las partes, para ello se les presentaron cuatro incisos, distribuidos de la siguiente forma: el uno y el cuatro se les daba la fracción en la que ellos debían contestar cuantos centímetros representaban con respecto al metro, por ejemplo en el inciso uno el estudiante tenía que dividir la cinta verde que medía un metro en 4 partes iguales, tomar 3 de ellas, luego tomar el metro y medirlas, de esta forma se diera cuenta que ¾ representa 75 centímetros, de igual manera responder el inciso cuatro. En el inciso dos y tres se dio en forma inversa, es decir dada la cantidad de centímetros debían identificar la fracción representarla con respecto al metro. Por ejemplo en el inciso tres dividir el metro por mitad y responder que 50 cm. equivalen a ½ de metro.

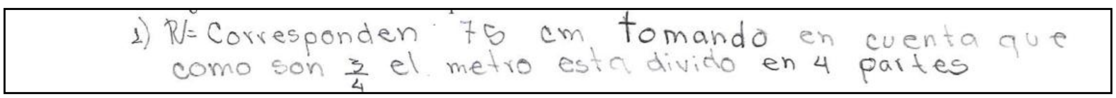
La actividad con sus respectivos incisos es la siguiente:

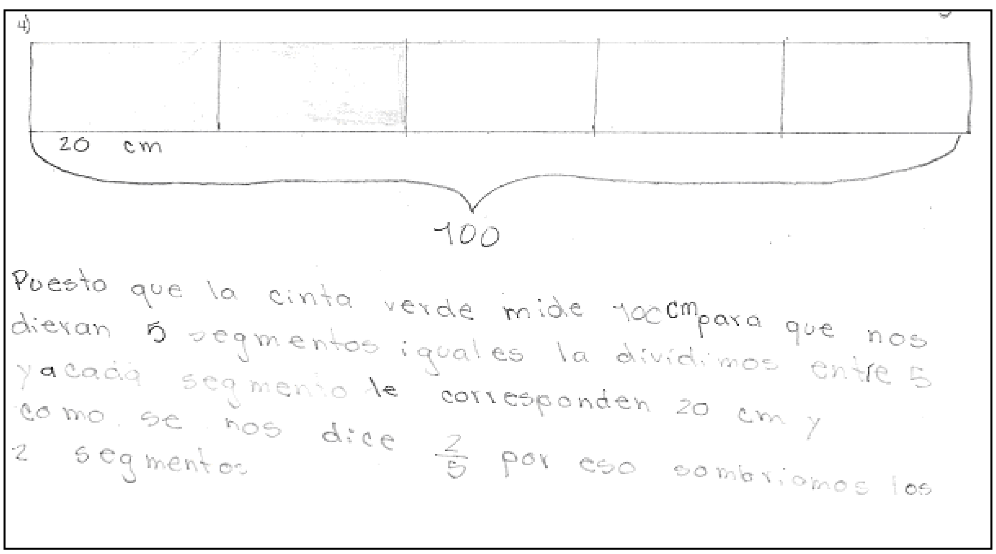
Actividad #2

Utilizando la cinta de un metro de color verde, el marcador y la cinta métrica verifique:

1. ¿Cuántos centímetros corresponden a ¾ m?
2. ¿Qué parte del metro representan 50 cm? Expréselo con una fracción
3. ¿Qué parte del metro representan 20 cm? Expréselo con una fracción
4. Represente en la cinta verde 2/5 m (dibuje el diagrama)

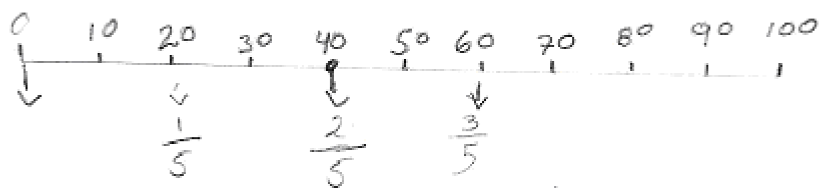
Con respecto a las respuestas del reactivo uno y cuatro fueron muy parecidas entre todos los equipos, por ejemplo, un equipo responde lo siguiente:


1) R/= Corresponden 75 cm tomando en cuenta que como son $\frac{3}{4}$ el metro esta divido en 4 partes



Estas respuestas evidencian que los estudiantes tienen clara la relación existente ente el todo y las partes, ya que en esta actividad no presentaron ningún error ni dificultad para hacerlo; siendo que las reflexiones que se hicieron en la actividad #1 con ayuda de la maestra en la que se aclaró una serie de dudas con respecto a la representación de las fracciones utilizando las cintas de color sirvieron como base para responder los incisos de la actividad # 2.

Para el caso este equipo en el inciso uno concluye que los 100 centímetros que conforman el metro se divide en cuatro, por lo que tomando tres grupitos de 25 cm se tienen 75 cm; y en el caso del inciso cuatro hacen uso de un diagrama par representar $\frac{2}{5}$ del metro, haciendo uso de la división para saber cuantos centímetros corresponden a $\frac{1}{5}$ de metro; sin embargo otro equipo utilizó la recta numérica para representar esta fracción:



Esto significa que no presentan dificultades para poder dividir un todo en partes iguales, y lograron comprender que la relación del todo y las partes se conserva sin tener en cuenta su forma o tamaño.

En las respuestas del reactivo tres hubo 4 equipos que lo relacionaron con el inciso uno, respondiendo que 50 centímetros era dos veces 25 cm por lo tanto le correspondían $\frac{2}{4}$ de metro, sin embargo uno de los equipos logró representarlo con la fracción $\frac{1}{2}$, el cual no lo justificó, pero se evidencia que se dio cuenta que 50 cm era la mitad del metro.

Con lo anterior no significa que los demás equipos no lo hicieron bien, lo que sucede es que hasta este momento no se había trabajado con fracciones equivalentes por lo que ellos no lograron establecer que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Con respecto al inciso 3 todos los equipos coinciden en que la respuesta es $\frac{1}{5}$ y para ilustrarlo veamos lo que contestó uno de los equipos:

$\frac{1}{5}$ porque dividimos el métro en 5 partes y cada parte mide 20 cm entonces llegamos a la conclusión que representa $\frac{1}{5}$ del metro

El equipo argumenta su respuesta utilizando la estrategia de la división, que fue utilizada por varios grupos en varias de las preguntas, al igual que los diagramas ya que estos les ayudan a visualizar sus respuestas.

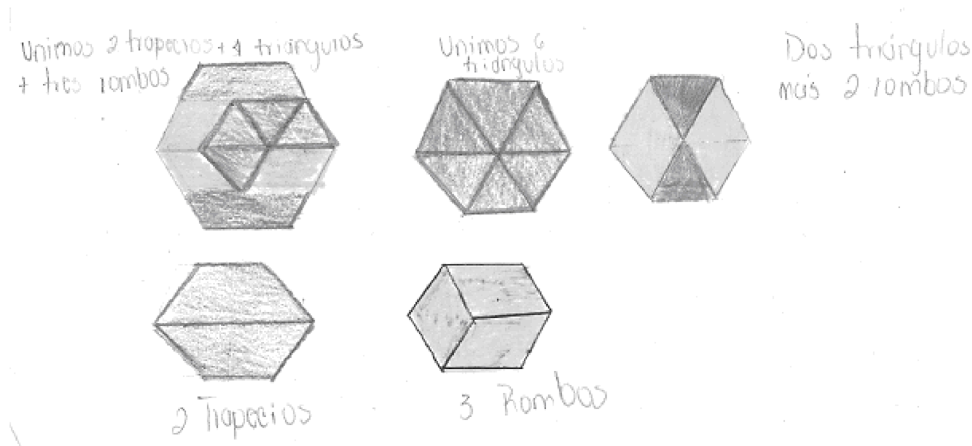
En resumen, en esta sesión de trabajo se logró introducir de forma exitosa el concepto de fracción en su interpretación parte – todo, comenzando así a construir la base para entender las demás interpretaciones; como lo afirman varios autores, entre ellos Kieren, Charalambous y Pitta-Pantazi citados en Valdemoros (2004), teniendo en cuenta que no es suficiente, por lo que se implementaron otras guías que apoyan la comprensión de dicha interpretación y que seguidamente se presenta su análisis.

4.1.3 Guía de trabajo # 1

El objetivo de esta guía (ver anexo 4) era que los estudiantes identificaran las partes de una fracción (numerador, denominador), a la vez establecer la relación entre el todo y las partes, y la representación de las fracciones mediante diagramas; para ello se utilizó material concreto como ser: un hexágono, seis triángulos, dos trapecios y tres rombos elaborados de papel fomin, con ello se pretendía que el estudiante encontrara varias relaciones y las pudiera representar mediante una fracción, por ejemplo una de las actividades era que tomando el hexágono como el todo , pudieran formar más hexágonos utilizando las otras piezas, de esa manera poder establecer relaciones entre ellas, y representar cada una de estas relaciones con una fracción. A continuación se detallan cada una de las preguntas y actividades planteadas:

1. Utilizando las figuras de los triángulos, rombos y trapecios forme el hexágono, (encuentre 5 formas diferentes como mínimo) explique el procedimiento y haga el dibujo en cada caso

En la realización de esta actividad cada equipo de trabajo, respondió de manera exitosa, ya que formaron varios hexágonos combinando las figuras, por lo que se logro el propósito de que ellos relacionaran las partes entre sí, las soluciones coincidieron en gran medida, los estudiantes estuvieron motivados al ejecutar la actividad. Por ejemplo uno de los equipos combinó todas las piezas para formar un solo hexágono, y en sus respuestas reflejan que piezas y cuantas utilizaron para formar cada hexágono, lo que les facilitó identificar con que fracción se puede representar cada pieza tomando el hexágono como la unidad, para ilustrar lo antes mencionado se presenta continuación la respuesta de este equipo:



En general los grupos no presentaron ninguna dificultad en la ejecución de esta actividad. La maestra realizó el papel de observadora en cada equipo.
Una vez que se logró el propósito de que los alumnos relacionaran el todo y las partes, se les plantearon otras actividades e incisos en los que debían utilizar fracciones para representar las piezas que formaban los hexágonos tales como:

2. Si el hexágono es la unidad, ¿Qué fracción de la unidad es:
   a. un triángulo ______
   b. un rombo ________
   c. un trapecio _______
   d. dos triángulos ________
   e. tres triángulos ________
   f. cuatro triángulos ______

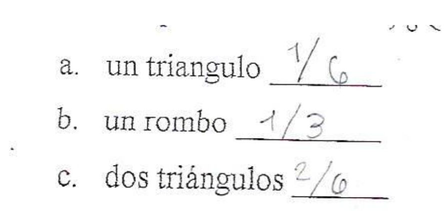
Las respuestas de los cinco equipos fueron muy parecidas, no presentaron ningún error ni dificultad para contestarlas, ya que en las sesiones de trabajo anteriores en las que se había realizado la guía de laboratorio y las reflexiones con la maestra, se afianzó la relación del todo y las partes, a la vez la representación de cada parte haciendo uso de una fracción.

Para responder los incisos de esta actividad los estudiantes se basaban en los hexágonos que tenían formados usando las piezas , por lo que fácilmente respondían que fracción le correspondía a cada pieza, siendo sus respuestas: (a) 1/6, ya que el hexágono esta formado por seis triángulos, (b) 1/3, dada la situación que el hexágono se forma por tres rombos, (c) 1/2, esta formado por dos trapecios, y en el reactivo (d),(e) y (f) la mayoría de las respuestas fueron 2/6 , 3/6, 4/6 exceptuando un equipo que en el inciso (e), respondió 1/2, lo que significa que se dio cuenta que tres triángulos formaban la mitad del hexágono, y a la vez hay una inducción a las fracciones equivalentes, porque relacionaron que el trapecio esta formado por tres triángulos.

Los reactivos tres y cuatro son muy parecidas, con la diferencia que la unidad cambia

3. Si el trapecio es la unidad, ¿Qué fracción de la unidad es:
   a. un triángulo _______
   b. un rombo _______
   c. dos triángulos ______

En esta pregunta las respuestas coincidieron en la mayoría de los equipos. Cuatro equipos respondieron en forma correcta, pero un equipo respondió incorrectamente ya que aparentemente hubo una confusión de lo que se tomó como la unidad, sus respuestas fueron:


a. un triangulo 1/6
b. un rombo 1/3
c. dos triángulos 2/6

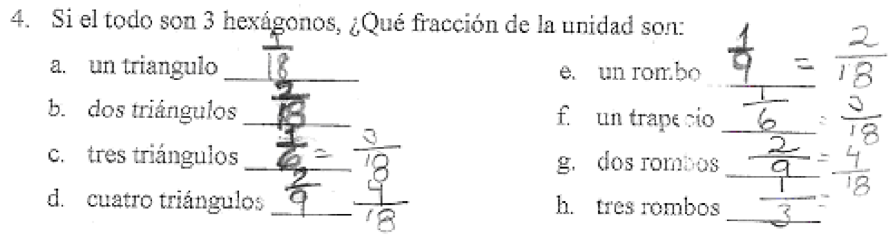
Al analizar estas respuestas se evidencia que son las mismas que las de la pregunta dos, lo que significa que el equipo visualizó cada pieza tomando el hexágono como todo y no el trapecio, es decir que faltaba trabajar con ellos la parte de descomponer un todo en partes iguales y luego relacionarlas entre sí, por lo que la maestra procedió a realizar varias construcciones de figuras utilizando el material, de tal manera que pudieran comprender la diferencia, por ejemplo se les explicó que cuando el hexágono era el todo este se formaba por seis triángulos, por lo que cada triangulo era 1/6 del todo, mientras que cuando el todo era el trapecio solo lo formaban tres triángulos por lo que cada uno de ellos representaba 1/3, se hicieron diferentes ejercicios, hasta aclarar la situación y así evitar que continuaran cometiendo el error en las otras preguntas.

En los incisos de la pregunta cuatro se les pide algo similar solo que la unidad ahora eran tres hexágonos

4. Si el todo son 3 hexágonos, ¿Qué fracción de la unidad son:

a. un triángulo __________	e. un rombo ________
b. dos triángulos ________	f. un trapecio _______
c. tres triángulos ________	g. dos rombos _______
d. cuatro triángulos ______	h. tres rombos _______

Los cinco equipos respondieron en forma correcta, lo que significa que todos lograron entender la relación que existe entre el todo y las partes, y la representación de esta relación utilizando fracciones. Es importante mencionar que uno de los equipos utilizó fracciones equivalentes, lo que parece interesante ya que hasta este momento no se había abordado esta temática, veremos lo que el equipo contestó:


4. Si el todo son 3 hexágonos, ¿Qué fracción de la unidad son:

a. un triangulo $\frac{1}{18}$	e. un rombo $\frac{1}{9} = \frac{2}{18}$
b. dos triángulos $\frac{2}{18}$	f. un trapecio $\frac{1}{6} = \frac{3}{18}$
c. tres triángulos $\frac{1}{6} = \frac{3}{18}$	g. dos rombos $\frac{2}{9} = \frac{4}{18}$
d. cuatro triángulos $\frac{2}{9} = \frac{4}{18}$	h. tres rombos $\frac{1}{3}$

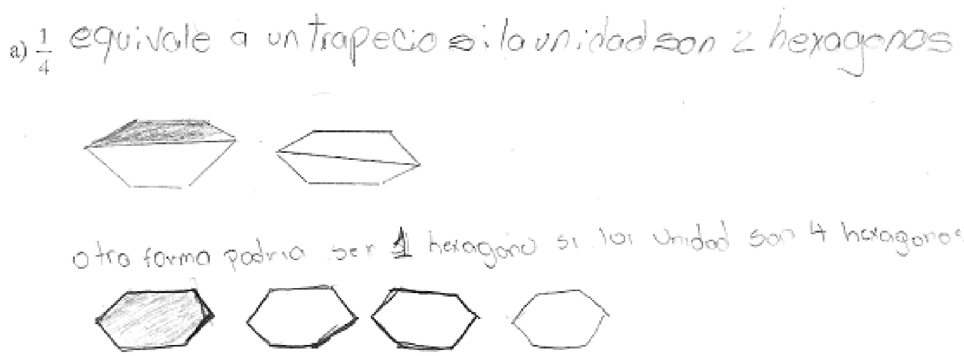
Estas respuestas reflejan lo que manifiesta Lamon (2007), cuando hay un claro entendimiento sobre esta interpretación se les facilitará el estudio de las fracciones equivalentes, siendo estas muy importantes para el entendimiento de las demás interpretaciones.

El reactivo 5 era un poco diferente a las anteriores, se le presentaba una fracción con el objetivo de que ellos deducirán cuantos hexágonos debían conformar el todo para poder representarla

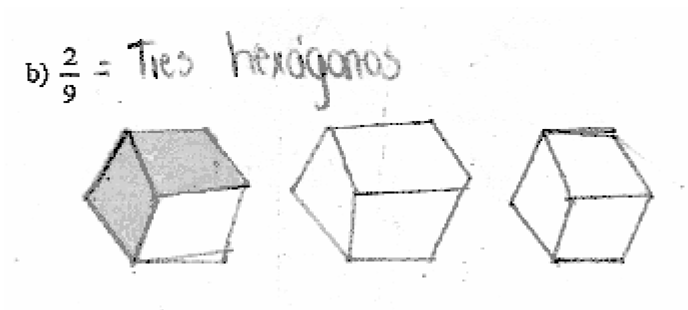
5. ¿Cuántos hexágonos deben conformar el todo para representar las siguientes fracciones? Explique el procedimiento que utilizó para cada caso y muestre mediante un dibujo su representación

    a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{9}$

El inciso (a) se les dificultó un poco ya que la fracción no era posible poder representarla utilizando un hexágono como la unidad, sin embargo los equipos utilizaron varias estrategias, por ejemplo una de ellas fué: usando cuatro hexágonos por lo que cada uno se representa con 1/4, y la otra es: usaban dos hexágonos construidos con dos trapecios cada uno, por lo que cada trapecio se representa con 1/4, para ilustrar se muestra la respuesta:



En la respuesta del inciso (b) las estrategias utilizadas fueron parecidas a las anteriores, todos los equipos respondieron que se necesitan tres hexágonos formados por tres rombos cada uno y que cada rombo representa 1/9, ejemplo:



Otro equipo, presento las dos opciones, es decir que aparte de la respuesta presentada en la imagen anterior, también consideraron la unidad como 9 hexágonos y que por lo tanto 2/9 eran 2 hexágonos.
En estas preguntas no hubieron respuestas equivocadas, pero si la dificultad de visualizar que cada fracción se podía representar de otra forma ya que en su mayoría recurrían a tomar el todo como 4 hexágonos en el caso del inciso (a) y 9 hexágonos en el inciso (b). Sin embargo en las reflexiones que se hicieron al interior de cada equipo y con ayuda de la maestra pudieron identificar correctamente la unidad y representar la fracción.

En conclusión, en esta sesión se observó un mejor desempeño de los estudiantes, un mayor entendimiento del concepto de fracción como parte- todo, así mismo se evidenció la utilidad y el beneficio que nos proporciona el trabajar con materiales que los alumnos puedan manipular y hacer sus propios descubrimientos, lo que les facilita la comprensión de este importante concepto a la vez contribuye en gran medida a mantener la motivación.

4.1.4 Guía de trabajo # 2

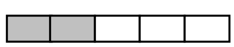
Con la aplicación de esta guía (ver anexo 5), se pretendía que el estudiante pusiera en práctica lo aprendido en las sesiones de trabajo anteriores sobre la interpretación parte-todo, que afianzaran sus conocimientos y eliminaran dudas o dificultades que hasta este momento podían presentarse.

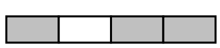
Anteriormente a su ejecución se realizaron actividades de aprendizaje en conjunto con la maestra, en donde se resolvieron situaciones similares a las presentadas en la guía en forma conjunta, es decir se tomó la participación de los estudiantes resolviendo problemas en la pizarra, y tomando en cuenta las reflexiones y experiencias encontradas en el desarrollo de las guías anteriores.

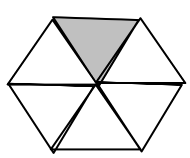
En esta guía se les presentaron situaciones en las que debían identificar en diagramas o dibujos el número fraccionario con el que se podía representar la parte señalada, para ello se les daba una figura dividida en partes iguales en la cual se sombreaba algunas de estas partes, o una colección de objetos con algunos de ellos sombreados y el estudiante debía identificar la fracción que se estaba representando en cada caso, también se les presentó problemas en los que se aplican fracciones a situaciones de la vida real, en donde tenía que dividir un todo en partes iguales, a la vez establecer relación entre el todo y las partes, ya que según Charalambous y Pitta-Pantazi son elementos importantes que dan la pauta de que un estudiante ha entendido claramente esta interpretación.

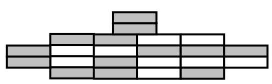
A continuación se detalla cada una de los problemas con sus respectivos reactivos:

1. Dadas las siguientes figuras represente mediante una fracción la parte sombreada y escriba como se lee cada una:

a)  ______ ________________

b)  ______ ________________

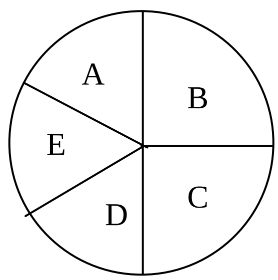
c)  ______ ________________

d)  ______ ________________

En el desarrollo de cada reactivo no se presentó ninguna dificultad, los 14 estudiantes contestaron correctamente, por lo que se puede afirmar que identifican claramente la fracciones que se representan en cada diagrama, y como se lee cada una de ellas. También se puede afirmar que manejan los conceptos de denominador y numerador correctamente, de manera que las sesiones de trabajo que se habían desarrollado anteriormente reflejaron su fruto, superando de esta forma la dificultad que se dio inicialmente en el diagnóstico en donde la mayoría de los alumnos tenían dificultad para identificar una fracción en un diagrama.

Con el propósito siempre de erradicar los errores que se encontraron en el diagnóstico se les presentó el reactivo 2, que se detalla a continuación:

2. A continuación se le presenta una figura conteste en forma clara lo que se le pide no borre los procedimientos que utiliza.

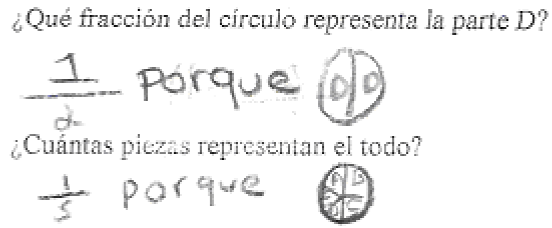


¿Qué fracción del círculo representa la parte B?
¿Qué fracción del círculo representa la parte D?
¿Cuántas piezas representan el todo?

En el desarrollo de la sesión de trabajo antes de la aplicación de esta guía se realizaron problemas y ejercicios que le permitieron al estudiante poner en practica la división de la unidad en partes iguales, se implementó el uso de material concreto como ser los hexágonos los cuales se podían formar utilizando diferentes figuras con diferentes representaciones de fracciones, de esa forma cuando se les presentó figuras con diferentes particiones se les facilitó la identificación de las fracciones representadas.

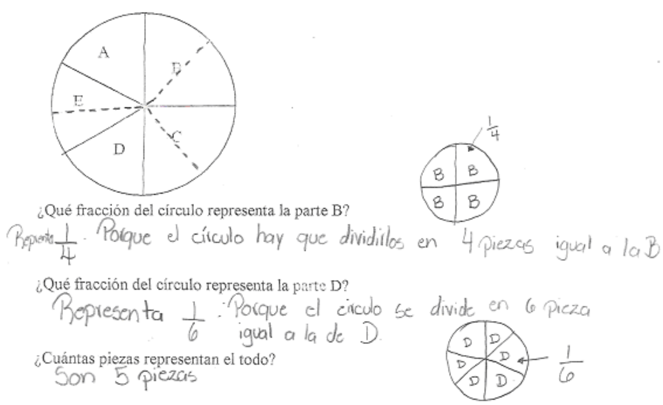
Con respecto al reactivo 2 las soluciones presentadas por los estudiantes en su mayoría fueron correctas, sin embargo hubo tres estudiantes que no lograron hacerlo bien, específicamente en la fracción que representaba la letra D y en la última pregunta.

Se puede observar en la respuesta presentada por uno de los alumnos:



Debido a ello fue necesario la intervención de la maestra, induciéndolos en la resolución de problemas que contribuyeron a erradicar esta dificultad.

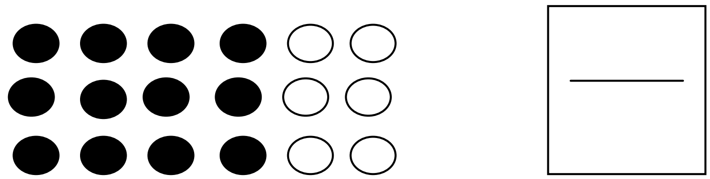
En las soluciones correctas se encontró que 8 estudiantes utilizaron la estrategia de dividir el círculo, primero en cuartos y luego en sextos para determinar la fracción que representa B y D, para ilustrar se presenta la respuesta de un alumno:



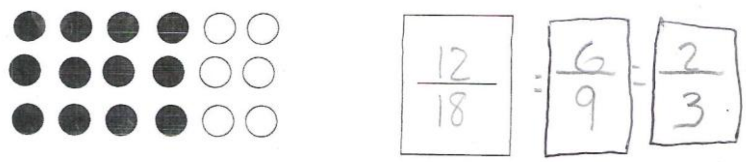
El resto de los estudiantes contestó usando estrategias mentales, sin plasmarlo en la figura, pero en general contestaron en forma correcta, por lo que se evidencia que las dificultades que tenían al momento de identificar que fracción se representaba en un diagrama dividido en partes de diferente tamaño, había sido superada en gran medida por lo menos en la mayoría de ellos y a la vez se reflejó que existe un buen dominio en esta interpretación.

Siguiendo esta misma estrategia de dividir un todo en partes iguales se les presentó el reactivo 3 con la diferencia que la unidad la representaba un conjunto de objetos, por lo cuál se les pedía que escribieran la fracción que representa los círculos negros

3. Dada la serie de círculos, escriba en el recuadro la fracción que representan los círculos negros con respecto al total



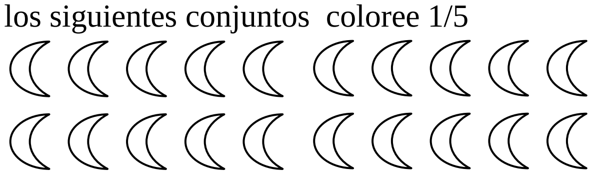
Doce estudiantes contestaron que la fracción era 12/18, aplicando la definición que el denominador son las partes que conforman el todo y el numerador son las partes que se toman del todo, el 100% de las respuestas planteadas estaban correctas, las dificultades encontradas fueron mínimas, las cuales fueron solucionadas entre ellos mismos, sin embargo es de interés mencionar que dos estudiantes mostraron sus respuestas usando fracciones equivalentes por simplificación, identificando así tres formas diferentes en que el grupo de círculos se podía dividir en partes iguales. Una de las respuestas de este reactivo elaborada por un estudiante se presenta a continuación:



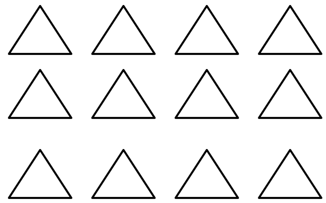
En esta respuesta se refleja un grado de dominio bastante fuerte sobre esta interpretación por parte de los alumnos, resultando muy productivo para el desarrollo de las siguientes sesiones de trabajo.

Seguidamente se les presentaron los reactivos 4 y 5 en los que dada la fracción debían representararla en una colección de objetos:

4. Dados los siguientes conjuntos coloree 1/5



5. Dado el siguiente conjunto coloree 3/4 del conjunto



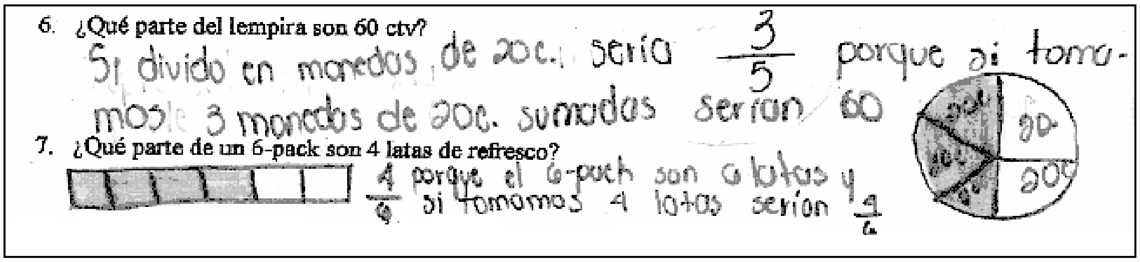
Para dar solución a estos problemas, los estudiantes utilizaron varias estrategias, una de las más destacadas consistía en dividir las 20 lunitas entre 5 para saber cuantas lunas conformaban 1/5, de igual manera los doce triángulos entre cuatro. 11 estudiantes contestaron en forma correcta, en su mayoría respondieron que con cuatro lunitas conformaban 1/5, y nueve triángulos representaban los 3/4. Las dificultades presentadas se reflejaron en tres alumnas, ya que no lograron responder en forma correcta; para el caso dos de ellas colorearon 15 lunas como $\frac{1}{5}$ y 8 triángulos como ¾, lo que da la impresión que no hay claridad de como dividir un todo en partes iguales cuando este es una colección de objetos. Igual razonamiento presentó otra estudiante. Esto muestra que a ciertos estudiantes se les estaba haciendo difícil esta situación por lo que ameritaba trabajar un poco mas de estos problemas con ellas hasta lograr superar estas dificultades.

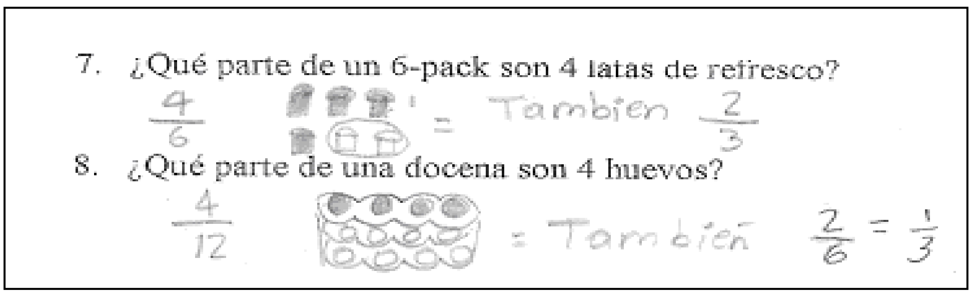
De igual manera se les plantearon los reactivos 5, 6 y 7 con el propósito de que implementaran estrategias propias para poder resolverlos, en los que debían establecer la relación entre las partes y el todo.

6. ¿Qué parte del lempira son 60 ctv?
7. ¿Qué parte de un 6-pack son 4 latas de refresco?
8. ¿Qué parte de una docena son 4 huevos?

Doce estudiantes ilustraron sus respuestas haciendo diagramas para representar cada fracción en cada reactivo. Todas las respuestas estaban correctas. Las dificultades (que fueron mínimas) se presentaron más que todo en el reactivo de los 60 centavos de lempira; para el caso dos estudiantes no lograban descomponer el lempira en partes iguales, es decir no encontraban la relación entre las monedas como fracción de lempira, pero a medida se dio la discusión con sus compañeros llegaron a la conclusión que el lempira se podía dividir en monedas de cinco, diez, y veinte centavos, por lo tanto 60 ctv se podía representar con la fracción 3/5, si son monedas de veinte centavos, 6/10, si son de diez y 12/20 si son monedas de cinco centavos.

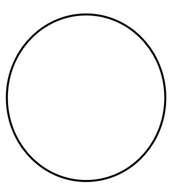
En el caso de los reactivos 4 y 6 no hubo ninguna dificultad, a continuación se ilustra las respuestas de estos reactivos presentados por dos estudiantes:



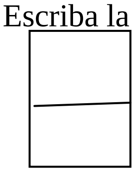


Los reactivos 9 y 10 se les plantearon de tal modo que dado el todo ellos fueran capaces de repartirlo en partes iguales:

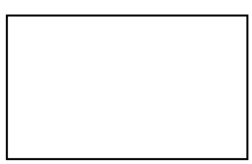
9. Una pizza se reparte por igual entre 8 personas ¿Qué parte de la pizza recibe cada uno de ellos? Indícalo en el dibujo



Escriba la respuesta



10. Cinco amigos se proponen pintar en común un muro como este:



¿Cómo se podría distribuir equitativamente el trabajo a realizar? Indícalo en el dibujo de arriba. Así a cada amigo le corresponderá pintar **__________**del muro

En el desarrollo de estos problemas no se presentó ninguna dificultad, ya que con mucha facilidad los catorce estudiantes respondieron en forma correcta, coincidiendo todos en que de la pizza correspondía 1/8 a cada persona, y en el diez coincidieron que correspondía pintar 1/5 a cada amigo, por lo que se puede concluir que los alumnos manejan correctamente la partición de la unidad en partes iguales.

En conclusión se destaca el buen desempeño de los estudiantes en el desarrollo de las guías de trabajo, ya que lograron vencer sus dificultades, y afianzar el concepto de fracción en su interpretación parte todo, facilitando así el entendimiento de las demás interpretaciones.

Para lograr la comprensión de esta interpretación se pueden desarrollar una variedad de actividades desde edades tempranas, considerando que ésta es tomada en cuenta, con mayor fuerza en los programas de primaria, por lo que debe ser muy afianzada en ese nivel, y de esta forma iniciar al alumno en el entendimiento de cada una de las interpretaciones del concepto de fracción.

4.2 Medida

Para esta interpretación se incorporaron cinco problemas en el diagnóstico, con los cuales se pretendía explorar si el alumno manejaba algunos conceptos importantes, como ser: la representación gráfica de la fracciones en la recta numérica, nociones de equivalencia, operaciones de suma y resta; ya que según Clarke et al, (2007); Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) y Lamon(2006) , los alumnos que dominan esta interpretación deben poder desarrollar situaciones o problemas que involucren los conceptos antes mencionados.

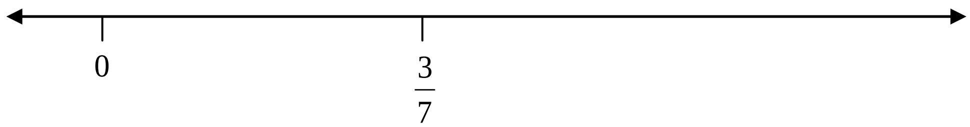
En la ejecución se desarrollaron siete sesiones de trabajo en las que se aplicaron tres guías de trabajo, una de laboratorio y dos juegos basándose en lo anteriormente expuesto.

A continuación se detalla el desempeño de los alumnos en cada una de los problemas planteados en el diagnóstico

4.2.1 Problemas de la prueba diagnóstica

Problema # 3

Ubica el uno en la recta numérica



Los resultados obtenidos se presentan en el cuadro No 4

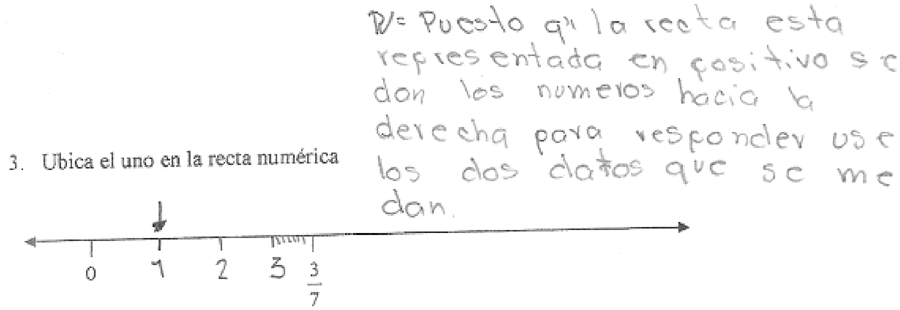
Cuadro No 5

Resultados del Problema #3

Reactivo / Respuestas	3
Correcta	1
Incorrecta	51
En blanco	4

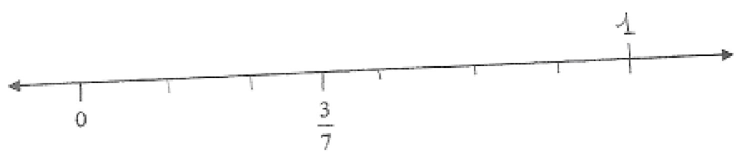
Con este problema se pretendía que el estudiante pudiera ubicar un número entero, en este caso la unidad dados dos puntos de referencia (fracciones) en la recta numérica.

Según las respuestas obtenidas presentadas en el cuadro 3, los estudiantes manifiestan grandes dificultades en la representación de fracciones en la recta numérica ya que la gran mayoría (91%) respondieron en forma incorrecta, cuyas respuestas reflejan varios errores, siendo uno de los mas comunes ubicar el 1 antes de la fracción 3/7, por lo que se evidencia que no tienen conocimiento sobre la relación de orden y la equivalencia, o mejor dicho hay un mal uso de estos conceptos, principalmente de la relación de orden , puesto que en sus respuestas se ve que toman esta fracción mayor que la unidad, es decir se basan nada más por el numerador y no toman en cuenta el denominador; siendo este uno de los errores más comunes según Charalambous Pitta-Pantazi. También es claro que el alumno no logra diferenciar entre el número entero y la fracción. A continuación se presenta la solución que propone una alumna:



Otros estudiantes ubicaron el uno adivinando y otros ni siquiera lo intentaron simplemente lo dejaron en blanco, sin embargo uno de los 56 estudiantes respondió correctamente

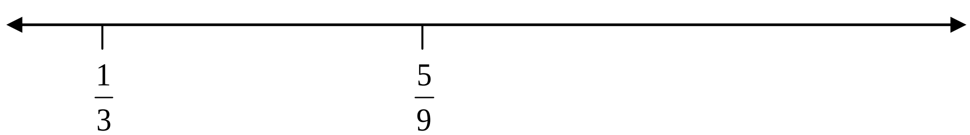
Veamos su respuesta:



Aunque no lo justificó se puede asumir que utilizó la estrategia de dividir la recta en siete partes iguales y de esa forma ubica el uno, por lo que se evidencia que el tiene claro que 1 equivale a 7/7 y además que 3/7 es menor que la unidad.

Problema # 4

Encuentra dos fracciones ubicadas ente $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{9}$



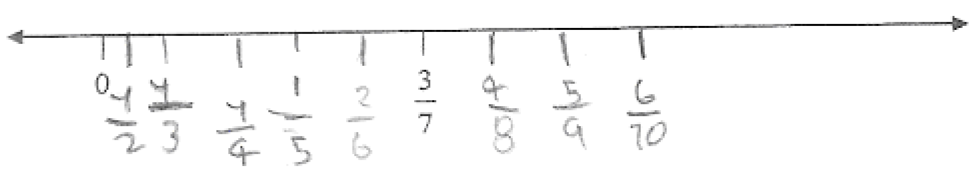
Los resultados obtenidos se presentan en el cuadro No 5.

Cuadro No 6

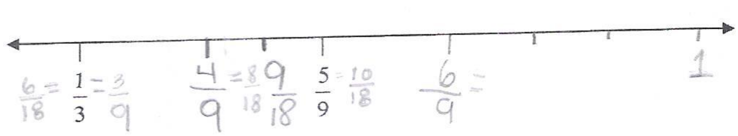
Resultados del Problema # 4

Reactivo / Respuestas	4
Correcta	4
Incorrecta	41
En blanco	11

Con este problema se tenía como objetivo que dadas dos fracciones pudieran ubicar dos fracciones entre ellas, para ello deben recurrir a la relación de orden o fracciones equivalentes.
Las soluciones propuestas por los estudiantes en su mayoría son incorrectas puesto que 73% presentó errores en sus respuestas, y un 20% que no lo hizo, es decir lo dejó en blanco.
Los errores que se evidencian son similares a los del problema anterior, es decir que no hay dominio de la relación de orden y tampoco encuentran diferencia entre los números enteros y fracciones. Estos errores no están alejados de los que clasifican Brown, G. y Quinn (2006) en su estudio, en donde mencionan errores conceptuales en diferentes situaciones. A continuación se presenta la solución que propone un estudiante:



Es claro que en esta solución se presenta la extensión de los números enteros. No hay entendimiento de la interpretación parte todo y no identifica que fracción es mayor o menor.
Del 7% de los estudiantes que respondió correctamente, uno de ellos hizo uso de las fracciones equivalentes para encontrar la solución, su respuesta es la siguiente:



Los demás ubicaron fracciones como 2/5, 3/7 entre otras pero no se evidencia la estrategia utilizada.

Problema # 5

Qué fracción es mayor $\frac{2}{3}$ *ó* $\frac{5}{7}$ deje la evidencia de cómo llegó a la respuesta

Los resultados se presentan en el cuadro No 6

Cuadro No 7

Resultados del Problema # 5

Reactivo / Respuestas	5
Correcta	8
Incorrecta	44
En blanco	4

Con esta pregunta se pretendía explorar los conocimientos que el estudiante tenía con respecto a la relación de orden de fracciones, a la vez identificar las dificultades que ellos presentan, que estrategias utilizan para llegar a la respuesta, de esta forma darse cuenta si hacen buen uso de la recta numérica, si dominan fracciones equivalentes o si usan algún algoritmo en especial.

Si observamos los resultados que se reflejan en el cuadro No 5 se evidencia que la mayoría (78%) contestó en forma incorrecta más un 7% que lo dejó en blanco, encontrándose en sus respuestas varios errores, dentro de los cuales se evidencia:

- La extensión lógica de la suma con números naturales; la solución que propone una alumna es:

$\frac{2}{3}$ le faltan $\frac{3}{4}$ para llegar a $\frac{5}{7}$ por lo tanto $\frac{5}{7}$ es mayor

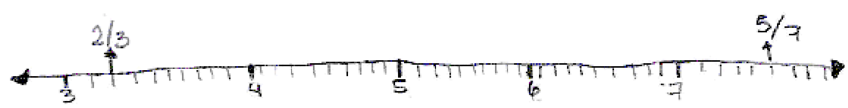
Es claro que la estudiante hace uso de la suma en forma incorrecta para saber la fracción que le debe sumar a 2/3 para que sea igual a 5/7.

- El uso incorrecto de algoritmos; con respecto a esto un alumno responde:

porque 2×3 es $=6$
y porque 5×7 es $=35$ y por lo tanto $\frac{5}{7}$ es mayor que
$\frac{2}{3}$

Aparentemente ella tiene una leve noción de que se puede usar un algoritmo para dar con la respuesta y en vez de comparar fracciones comparar números enteros, pero hace un mal uso del algoritmo, ya que multiplica el numerador con el denominador entre sí y luego compara los resultados para dar su respuesta.

- Representación incorrecta de fracciones en la recta numérica; esto es lo que responde un alumno



R/= 5/7 es mayor 2/3

Por lo que se evidencia que se basa en el denominador para ubicar las fracciones en la recta, es decir en el caso de 2/3, como el denominador es 3 entonces la ubica entre 3 y 4.

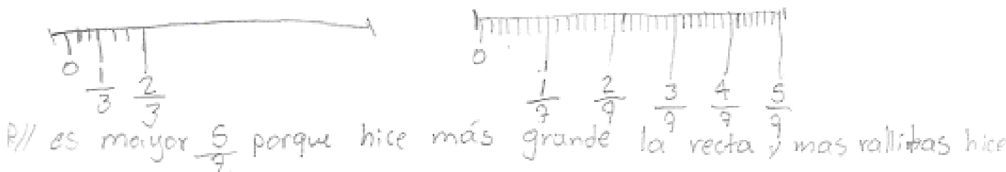
Otro de los errores mas comunes fue la comparación de los numeradores y los denominadores entre sí, es decir que como en la fracción 2/3 y 5/7 el número 2 es menor que el 5 y el número 3 es menor que el 7 entonces concluyeron que 5/7 era mayor que 2/3.

En las respuestas correctas de los 8 estudiantes se reflejaron estrategias como el uso de diagramas y la representación en la recta. Veamos las respuestas que dieron dos estudiantes:
Usando diagrama:

R/= $\frac{2}{3}$ es menor que $\frac{5}{7}$

El estudiante responde correctamente, sin embargo en el diagrama que el estudiante utilizó no se evidencia con claridad la relación entre las fracciones ya que las unidades son de diferente tamaño y las divisiones de cada unidad también.

Usando la recta numérica:



Aunque la respuesta es la esperada la representación de las fracciones en la recta no es del todo clara, ni tampoco correcta ya que hace particiones de acuerdo al denominador de cada fracción, lo que indica que tiene nociones de cómo llegar a la solución pero presenta dificultades en la representación gráfica.

.

Problema # 6

Había $\frac{6}{7}$ de litro de leche y María se tomó $\frac{2}{7}$ de litro ¿Cuánta leche quedó?

El cuadro No 7 muestra los resultados obtenidos de este problema

Cuadro No 8

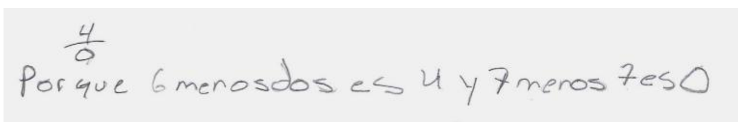
Resultados del Problema # 6

Reactivo / Respuestas	6
Correcta	31
Incorrecta	22
En blanco	3

El objetivo de este problema era determinar si el estudiante podía identificar que operación debía aplicar para resolverlo, a la vez explorar si podía utilizar el algoritmo de la resta de fracciones con igual denominador. En el cuadro No 6 se puede apreciar que un 58% de los alumnos, que realizaron el diagnóstico resolvió correctamente, lo que significa que lograron interpretar el problema y así identificar que necesitaban restar para resolverlo, dando como respuesta que solamente quedaban $\frac{4}{7}$ litros de leche, ya que $\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$. Sin embargo hubo un buen porcentaje de estudiantes (39%) que contestó en forma incorrecta, esto sin tomar en cuenta que también hubo alumnos que no respondieron.

Entre los errores encontrados en las soluciones propuestas, se encuentra la extensión de la suma y resta de números enteros, siendo este uno de los errores más usuales que se cometen al resolver situaciones con fracciones que involucren la suma o la resta según argumenta Brown G. y Quinn R. (2006)

Para evidenciar estas respuestas se presenta a continuación la solución que da un estudiante:


$\frac{4}{0}$
Porque 6menosdos es 4 y 7menos 7es0

Es claro que hay un mal uso del algoritmo, además no hay conocimiento de que en una fracción, el cero no puede ser denominador, ya que las divisiones entre cero no están definidas en R.

Otro de los errores frecuentes es que no lograron identificar la operación que debían aplicar y algunos dividían 6/7 y 2/7, encontrando un resultado incorrecto. También se evidenció que algunos estudiantes restaban los numeradores en forma correcta pero colocaban la respuesta como un número entero, para el caso tenían: $\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=4$.

Problema # 9

Hilda pintó una pared. Primero pintó $\frac{3}{4}\,m^2$ de área y luego $\frac{1}{6}\,m^2$. ¿Cuántos metros cuadrados (m^2) pintó por todo?

Los resultados de este problema se muestran en cuadro No 8:

Cuadro No 9

Resultados del Problema # 9

Reactivo / Respuestas	9
Correcta	2
Incorrecta	47
En blanco	7

En este problema se les presentó una situación de la vida real, en la que debían identificar la operación que se tenía que aplicar para resolverlo, y en la que podían aplicar el algoritmo de la suma de fracciones, como una de las diferentes estrategias para darle solución. En el cuadro No. 6 se puede observar la superioridad de respuestas incorrectas, quedando como evidencia las dificultades que tienen los alumnos para resolver problemas que implican la suma de fracciones, especialmente con diferente denominador. Al igual que en el problema anterior los errores más encontrados fueron, la extensión de la suma de números naturales, demostración de conceptos erróneos en la relación de fracciones equivalentes con suma de fracciones, y mal uso de algoritmos; también se presentó la dificultad al momento de identificar la operación que tenían que aplicar. Un 84% de los alumnos no lograron responder correctamente el problema evidenciándose los errores antes mencionados.

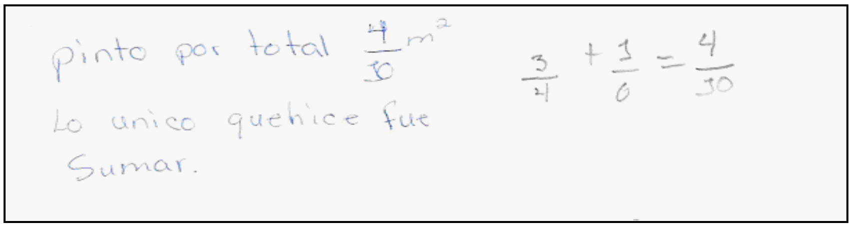
Uno de los estudiantes que respondió en forma correcta refleja el uso del algoritmo de la suma de fracciones, y la otra hace uso de fracciones equivalentes, para lo cual responde de la siguiente forma:

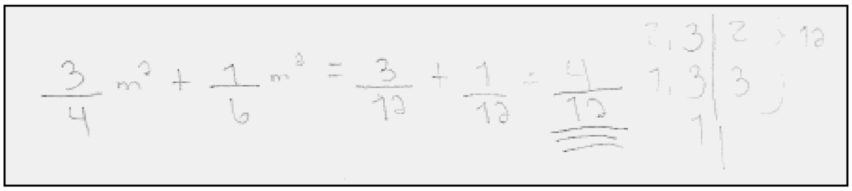
$$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{4}=\frac{6}{8},\frac{9}{12},\frac{12}{16},\frac{15}{20},\boxed{\frac{18}{24}}+\frac{1}{6}=\frac{4}{24}$$

$$\frac{18}{24}+\frac{4}{24}=\frac{22}{24}$$

Según esta respuesta se puede concluir que el estudiante tiene fuertes nociones de fracciones equivalentes lo que le contribuye a resolver el problema.

También se presenta dos soluciones incorrectas que propusieron dos estudiantes, en la que se logra evidenciar que el error que cometen es la extensión de la suma en los números enteros, por lo que suman numeradores con numeradores y denominadores con denominadores.





El análisis de los problemas antes mencionados que fueron aplicados en el diagnóstico sobre esta interpretación reflejaron una serie de dificultades y errores que los estudiantes cometieron y que se mencionan anteriormente, los cuales definieron las bases para planificar las sesiones de trabajo y elaborar los instrumentos que se aplicaron durante el proceso y que contribuyen a eliminar los errores y afianzar cada uno de los conceptos que están involucrados con la interpretación medida. A continuación se detalla el desempeño de los alumnos durante el desarrollo de cada uno de los instrumentos aplicados.

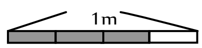
4.2.2 Guía de trabajo #3

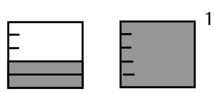
Los objetivos que se pretendían lograr al aplicar esta guía (Ver anexo 6) era que el estudiante identificara la fracción que se representaba por un punto en la recta numérica, representar fracciones dados puntos de referencia, haciendo uso de la clasificación de fracciones (propias, impropias y número mixto), ya que en el diagnóstico se refleja que fue uno de los problemas que más dificultades ocasionó.

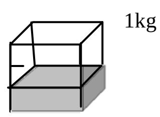
En vista de ello, antes de la aplicación de esta guía en la cuarta sesión de trabajo se realizaron algunas actividades usando material semiconcreto como ser, tiras de papel (cintas de colores que se utilizaron en la guía de laboratorio # 1), cuadros de cartulina con una medida de 10 pulgadas de lado, que representaran la unidad, todo ello para hacer las representaciones de diferentes fracciones y su clasificación, luego se hicieron esas representaciones en la recta

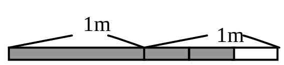
numérica. Se tomó como sugerencia la forma en que es abordado en la guía para el maestro de quinto grado PROMETAM. Se consideró con mucho énfasis las participaciones del alumno, y cuando era necesario las intervenciones de la profesora. Después de esto, procedimos a realizar la guía en donde al alumno se le presentaban situaciones como, localizar un número en la recta numérica y recíprocamente, identificar un número representado por un cierto punto en la recta; ya que según Charalambous y Pitta-Pantazi (2007), si hay un buen dominio de esta interpretación el estudiante debe ser capaz de hacerlo sin dificultades, a la vez se incluyeron algunos problemas de conversión de fracciones.
A continuación se detalla el desempeño de los estudiantes en cada uno de los problemas.

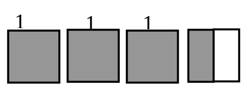
1. ¿Cuánto mide la parte coloreada? Escríbalo en el cuadrado con fracciones y según la clasificación (propia, impropia) escriba en la línea que tipo de fracción es:

a. 

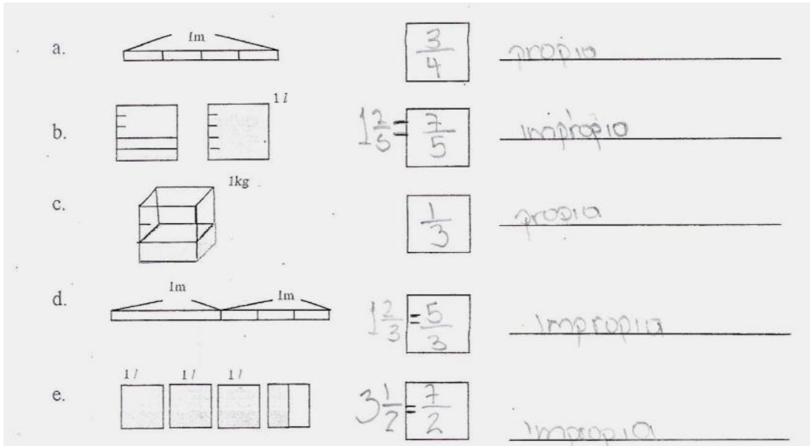
b. 

c. 

d. 

e. 

En este problema no se presentaron dificultades, ya que todos lo respondieron de forma correcta, en donde fue necesario aplicar los conocimientos de la interpretación parte todo para identificar la fracción que se representaba en cada diagrama, y con la clasificación lo hicieron muy bien. Por ejemplo en los incisos (b), (d) y (e) cinco estudiantes escribieron tanto la fracción impropia como el número mixto, es decir que lograron identificar las dos formas de escribir el número que representaba el diagrama. Se presenta la solución que propuso un estudiante:



Se puede apreciar que al utilizar los diagramas para que los estudiantes los representen con una fracción e identifiquen que tipo es, facilita la comprensión, ya que el alumno puede apreciar la relación existente entre las fracciones impropias y mixtas, es decir que una fracción impropia se puede escribir como mixta y viceversa.

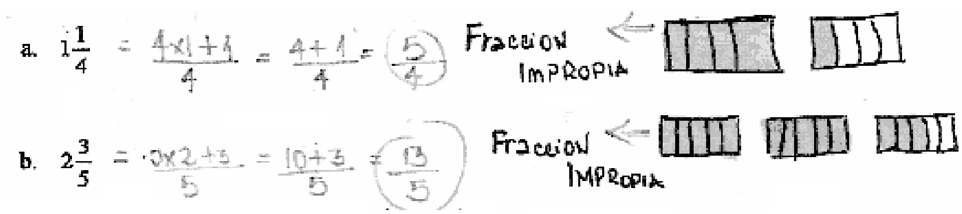
Para afianzar esta relación se les presentaron los problemas 2 y 3 con sus respectivos incisos

2. Convierta las siguientes fracciones mixtas en impropias (utilice algoritmo y diagramas). Explique los pasos seguidos para realizar la conversión
    a. $1\frac{1}{4}$
    b. $2\frac{3}{5}$
3. Convierta la siguientes fracciones impropias a mixtas (utilice algoritmo y diagramas). Explique los pasos seguidos para realizar la conversión
    a. $\frac{21}{3}$
    a. $\frac{13}{5}$

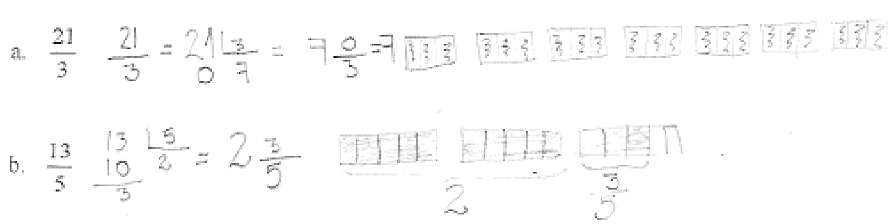
De igual manera que en le problema uno, los estudiantes no presentaron ninguna dificultad, ni en la aplicación del algoritmo, ni en la utilización de diagramas, todos ellos respondieron en forma correcta. En el inciso (a) del problema 5 se encontraron que al dividir 21 entre 3 daba como residuo cero, por lo que algunos presentaban el resultado como un numero entero, pero también hubieron respuestas que utilizaron la fracción mixta $7\frac{0}{3}$, explicándoles entonces que la fracción $\frac{0}{3}$ es igual a cero por lo tanto no era necesaria escribirla y se podía representar solo como 7.

A continuación se presenta la solución que dio una alumna:

Para el problema 2



Para el problema 3



Los procedimientos que ellos describieron se reflejan en la operación realizada, evidenciando que trabajaron correctamente.

Sin embargo cabe aclarar que según el planteamiento que se les dio en estos dos problemas se limita al alumno a que pueda utilizar otras estrategias para hacerlo, ya que se le esta sugiriendo como lo debe hacer, lo que significa no se le dió la libertad de que creara sus propias estrategias.

El problema 4 consistía en que los estudiantes escribieran un número entero utilizando fracciones.

4. Escriba el número que debe ser numerador en cada caso

a. $3 = \frac{\square}{7}$ b. $-15 = \frac{\square}{3}$ c. $5 = \frac{\square}{4}$

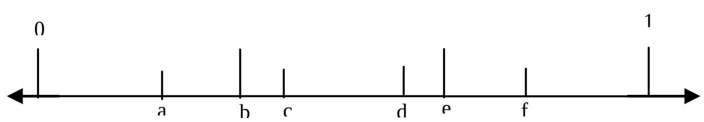
Para dar solución a este problema en cada reactivo la estrategia que los estudiantes utilizaron fue, multiplicar el número entero por el denominador y la respuesta la colocaban en el numerador de la fracción. Por ejemplo en el inciso (a) respondieron $\frac{21}{7}$, ya que $3 \times 7 = 21$ y $21 \div 7 = 3$, y así mismo contestaron los demás incisos, por lo que se puede decir de forma general que no se presentaron errores ni dificultades, los catorce estudiantes coincidieron en sus respuestas, lo que significa que las actividades de aprendizaje que se desarrollaron previo a la guía presentaron su fruto en ellas se aprovechó los conocimientos previos de los estudiantes y los errores que cometían para resolver ejercicios que contribuyeran a eliminar estos.

Los problemas 1, 2, 3 y 4 con sus respectivos incisos se desarrollaron con el objeto de que le facilitara al estudiante trabajar con las fracciones en la recta numérica.

A continuación se detallan los problemas referentes a la recta numérica:

5. Identifique fracciones en la recta numérica

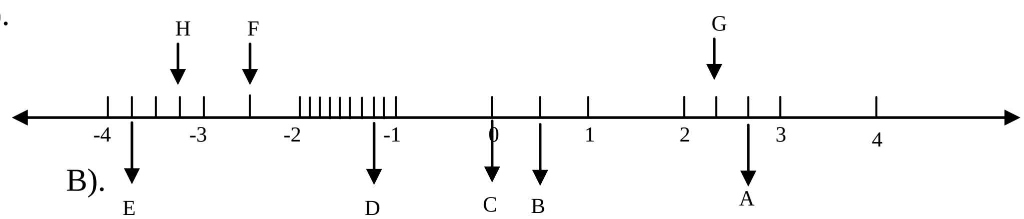
A). Dada la siguiente recta y los puntos en ella conteste las siguientes preguntas. Puede usar diagramas (recta) si lo considera necesario



a. ¿Qué fracción corresponde al punto b?
b. ¿Qué fracción corresponde al punto d?
c. ¿Qué punto corresponde a la fracción $\frac{4}{5}$?
d. ¿Qué punto corresponde a la fracción $\frac{2}{3}$?

Explique la forma en que identificó los puntos

B).



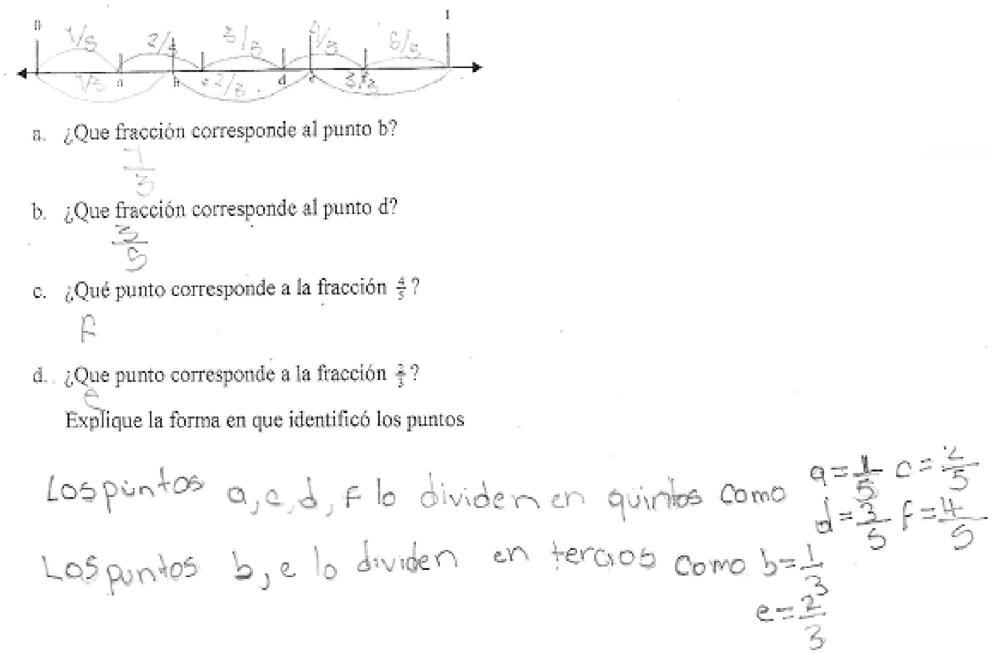
a. ¿Qué fracción corresponde al punto A?

b. ¿Qué fracción corresponde al punto C?
c. ¿Qué fracción corresponde al punto D?
d. ¿Qué fracción corresponde al punto G?
e. ¿Qué fracción corresponde al punto E?
f. ¿Qué punto corresponde a la fracción $\frac{1}{2}$?
g. ¿Qué punto corresponde a la fracción $-3\frac{1}{4}$?
h. ¿Qué punto corresponde a la fracción $-\frac{5}{2}$?

Este problema esta compuesto por dos incisos (A) y (B), en el primero se trata de identificar fracciones propias, es decir menores que la unidad, mientras que en el otro se trata de identificar las fracciones mixtas, propias, impropias y números enteros.

Las soluciones que los estudiantes propusieron para el inciso (A) fueron correctas, no se evidenciaron dificultades, sin embargo cabe mencionar que previo al desarrollo de la guía se realizaron actividades de aprendizaje junto con la maestra, considerando que en el diagnóstico reflejaron mucha dificultad al momento de trabajar con la recta numérica, por lo que se resolvieron una variedad de ejercicios de representación de fracciones en la recta, utilizando las cintas de cartulina de colores y rectas numéricas elaboradas en la pizarra, se tomó la participación individual de cada uno de los estudiantes, logrando detectar los errores y dificultades que presentaba cada uno de ellos, siendo este la representación incorrecta de fracciones en la recta numérica, se hicieron reflexiones en cada participación hasta lograr aclarar las dudas de los estudiantes.

Después de esta actividad en el desarrollo de la guía se observó mucha facilidad para determinar que fracción correspondía en cada subintervalo representado en la recta numérica. La respuesta que propuso una alumna es la siguiente:


a. ¿Que fracción corresponde al punto b?

$\frac{1}{3}$

b. ¿Que fracción corresponde al punto d?

$\frac{3}{5}$

c. ¿Qué punto corresponde a la fracción $\frac{4}{5}$?

f

d. ¿Que punto corresponde a la fracción $\frac{2}{3}$?

e

Explique la forma en que identificó los puntos

Los puntos a, c, d, f lo dividen en quintos como $a=\frac{1}{5}$ $c=\frac{2}{5}$ $d=\frac{3}{5}$ $f=\frac{4}{5}$

Los puntos b, e lo dividen en tercios como $b=\frac{1}{3}$ $e=\frac{2}{3}$

Se evidencia claramente la estrategia que utilizó la estudiante, al igual que los demás, en donde toman como referencia el número de intervalos y el tamaño de cada uno y de esta forma logran identificar que fracción representa cada letra y viceversa.

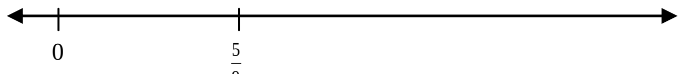
Lo que significa que tienen claro el concepto de fracciones propias. La interpretación parte todo en este momento juega un papel importante, ya que para identificar la fracción tomaron en cuenta la partición de la unidad en segmentos de igual tamaño.

Basándose en la misma estrategia del ejercicio anterior, dan respuesta a los reactivos del inciso (B), en donde utilizaron el concepto de número mixto como una estrategia para identificar o representar las fracciones impropias. Por ejemplo en el inciso (d) para saber que fracción esta representando la letra G tomaban 2 como entero y como la unidad de 2 a 3 esta dividida en tres partes iguales entonces la letra G representa el número mixto $2\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$, y así dieron respuesta a los demás reactivos. Las fracciones que estaban entre 0 y 1 las representaron correctamente.

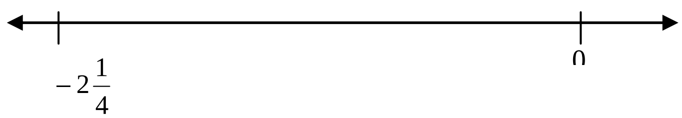
En conclusión en este problema los estudiantes se desenvolvieron muy bien, logrando así superar las dificultades que tenían para representar fracciones en la recta numérica, puesto que en el diagnóstico se reflejó que la mayoría no podía hacerlo correctamente.

Siguiendo con la misma situación se les planteó los problemas 6 y 7 en donde se les da puntos de referencia para que ubiquen la unidad.

6. Coloque el número uno (1) en la recta numérica. Explique el procedimiento que utilizó

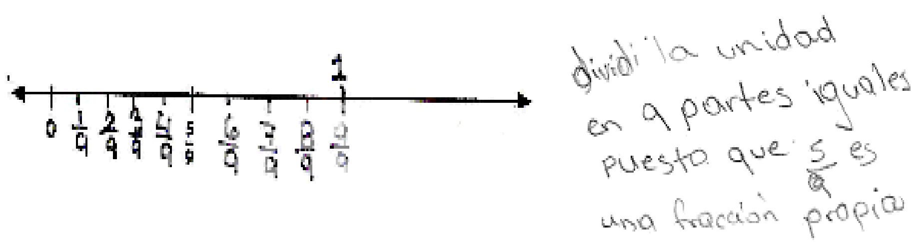


7. Coloque el negativo uno (-1) en la recta numérica. Explique el procedimiento que utilizó

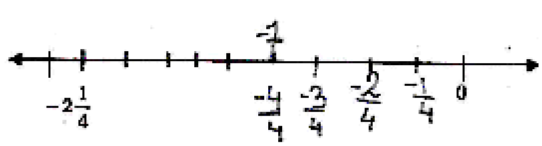


Estos problemas son muy parecidos a los propuestos en el diagnóstico en donde se recuerda que solo 1 logró hacerlo en forma correcta, pero después de las actividades de aprendizaje como ser resolución de ejercicios similares en la pizarra y en equipos de trabajo, realización de refecciones con apoyo de la maestra en caso de necesidad, hasta concluir en la respuesta correcta que se llevaron a cabo en la sesión de trabajo con ellos lograron superar las dificultades y no cometer los mismos errores que se detallaron anteriormente (ver análisis de la pregunta 3 del diagnóstico), por lo que en el desarrollo de este problema se desenvolvieron muy bien, algunos tenían ciertas dudas pero entre sus mismos compañeros se aclararon. A continuación se presenta la solución que propone un estudiante:

Ubicar el número 1



Ubicar el -1



De acuerdo a las soluciones que proponen los estudiantes la representación de las fracciones en la recta numérica no presenta ningún problema, es evidente que hay un entendimiento claro con respecto al tema.

Al finalizar la guía de trabajo se realizó una jornada en donde se hacían reflexiones acerca del trabajo hecho, y un reforzamiento de lo aprendido.

En conclusión, el desempeño de los alumnos en la realización de esta guía fue muy acertado, logrando así, vencer las dificultades al usar la recta numérica para representar fracciones. Se observó un mayor dominio y seguridad en ellos al trabajar con estas. Alcanzando en gran medida los objetivos propuestos.

Como la interpretación medida implica el entendimiento de varios conceptos, como el que se abordó en la guía de trabajo anterior, también es necesario que el alumno pueda trabajar con fracciones equivalentes en cualquier interpretación que se le presente, siendo estas muy útiles para sumar y restar fracciones, ya que facilitan el camino, y evitan la memorización de algoritmos, siendo más importante que lo entiendan y comprendan y no que resuelvan ejercicios y problemas de una forma mecánica. Las fracciones equivalentes juegan un papel primordial en todas las interpretaciones, pero se le da mucha más énfasis en la interpretación medida. Para entender el significado de las fracciones equivalentes se aplicó una guía de laboratorio que se detalla a continuación

4.2.3 Guía de laboratorio #2

Con el objetivo de que los estudiantes dedujeran el concepto de fracción y comprendieron su significado se aplicó la guía de laboratorio (ver anexo 3) la cual se llevó a cabo en grupos de tres integrantes, utilizando materiales tales como: 4 hexágonos (tres de ellos divididos en: 6 triángulos, 2 trapecios, 3 rombos) y 30 botones. En ella se les presentaron situaciones en las que debían utilizar los hexágonos y los botones para formar varios grupos del mismo tamaño y representarlos con fracciones, dichas situaciones son similares a las que realizaron en la guía de trabajo # 1, con la diferencia que en esta ocasión el propósito es que el alumno encontrara la relación de equivalencia entre dos o más fracciones, de esta forma se dieran cuenta las diferentes fracciones con las que se puede representar una misma cantidad, y con ello construyeran su propio significado de fracciones equivalentes.

Anteriormente al desarrollo de esta guía en la sesión de trabajo se plantearon ejercicios utilizando diagramas con fracciones equivalentes que se usaron en cada una de las actividades de la guía y se les preguntaba si eran iguales, en este momento los estudiantes presentaron dificultades para responder, no había seguridad en sus respuestas, pero en ese instante no se les aclaró si estaban en lo correcto o no y se procedió a aplicar la guía, de manera tal que cada uno descubriera mediante la realización de las actividades si las fracciones que se utilizaron representaban la misma cantidad, es decir eran equivalentes.

Las actividades desarrolladas para lograr tal fin se detallan a continuación:

Actividad #1

Tome uno de los hexágonos como la unidad y responda.

a. ¿Cuántos triángulos forman el hexágono? ¿Que fracción representan con respecto a la unidad?
b. ¿Cuántos trapecios forman el hexágono? Escríbalo como fracción
c. ¿Cuántos rombos forman el hexágono? Escríbalo como fracción
d. ¿Existe alguna relación entre las fracciones encontradas en el inciso a, b, c y la fracción $\frac{1}{1}$ que representa el hexágono? Explique

Con el desarrollo de esta actividad se pretendía que los estudiantes formaran la unidad (el hexágono) utilizando las piezas que se les proporcionaran, a la vez que se dieran cuenta que no importaba con cuantas piezas estuviera formada siempre era igual a uno. Las respuestas de todos los equipos fueron satisfactorias, tomando en cuenta que ya habían tenido la experiencia de trabajar con los hexágonos y tenían mucha habilidad para identificar la fracción que representaban, por lo que todos los equipos coincidieron que: en el inciso (a) la unidad esta formada por $\frac{6}{6}$, (b) $\frac{2}{2}$, (c) $\frac{3}{3}$.

Para ejemplificar un poco el razonamiento que ellos tuvieron en el inciso (d) se muestra lo que respondió uno de los equipos:

R: $\frac{6}{6}$, $\frac{2}{2}$ y $\frac{3}{3}$ tienen relación porque todos re-
presentan un hexágono.

Es evidente que el equipo tiene clara la relación que tienen todas las fracciones, siendo que cada fracción representa la unidad, pero hasta este momento no sabe como definirlas ni como llamarlas.

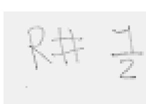
Actividad #2

Tome uno de los hexágonos como la unidad y responda.

a. ¿Qué fracción de la unidad le corresponde a un trapecio?
b. ¿Con qué figuras se puede formar el trapecio y cuantas se necesitan? ¿qué fracción de la unidad representan? Dibuje las representaciones realizadas y explique cómo encontró la solución
c. ¿Existirá alguna relación con la fracción que representa el trapecio y la fracción que se encontró en el inciso b? Explique
d. Sustituya la figura anterior por el rombo y conteste las preguntas del inciso b y c (actividad 2)

Con el desarrollo de esta actividad se pretendía que los estudiantes estuvieran más cerca de formular su propio significado de fracciones equivalentes, haciendo cada una de las actividades que se les propone. El desempeño de los equipos estuvo muy bien, no se presentaron dificultades y lograron establecer la relación entre las fracciones que se quería lograr. Observemos las soluciones que realizaron un equipo:

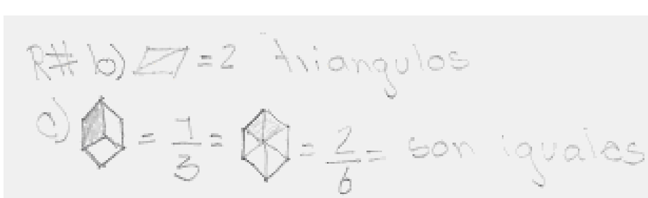
a)



b)

c)

d)



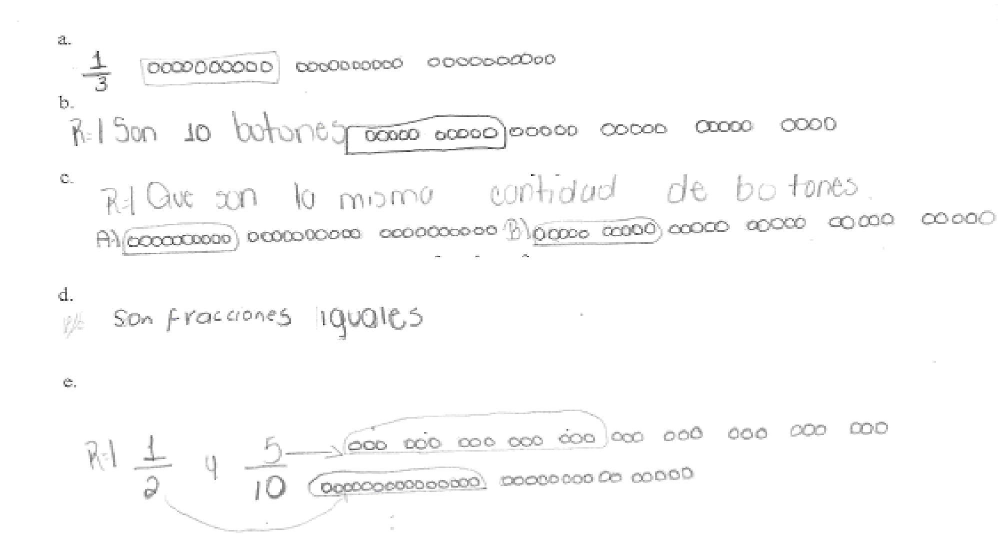
En las relaciones que el equipo encontró se evidencia que ellos logran hacer correctamente la relación entre ellas y logran verificar que son iguales, aunque no las nombran propiamente pero es un gran avance el hecho de que las igualen, ya que visualizan que aunque estén escritas en forma diferente representan la misma cantidad. De igual forma los demás equipos llegan a la misma conclusión.

Actividad #3

Utilizando los 30 botones como la unidad

a. Forme tres grupos de 10 botones ¿qué fracción representa cada grupo con respecto al todo?
b. De los 30 botones tome 2/6 ¿Cuántos botones son?
c. ¿Qué relación existe entre la fracción que se encontró en el inciso a y $\frac{2}{6}$? ¿y con respecto al número de botones? Explique y haga un dibujo para representar la relación encontrada
d. ¿Cómo podríamos llamarles a estas fracciones?
e. ¿Qué otras fracciones podrías obtener de la unidad (30 botones) que tenga la misma cantidad de botones?

El desempeño de los equipos en esta actividad fue muy acertado, al igual que en las actividades anteriores respondieron correctamente las preguntas que se le hacía y lograron establecer correctamente la relación, también cabe mencionar que hubieron dos equipos que respondieron el inciso (d) con el nombre que le corresponde, es decir fracciones equivalentes, los demás equipos las seguían llamando fracciones iguales, que también es correcto, si lo vemos desde el punto de vista que representan la misma cantidad. Para apreciar un poco el razonamiento de los equipos se presenta lo que respondió uno de ellos:


a.
$\frac{1}{3}$
b.
R: Son 10 botones
c.
R: Que son la misma cantidad de botones
A) B)
d.
R: Son fracciones iguales
e.
R: $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{10}$

Los demás equipos concluyeron lo mismo sus respuestas variaron en el inciso (e), ya que propusieron fracciones diferentes como ser $\frac{2}{15}$ *y* $\frac{4}{30}$, $\frac{3}{10}$ *y* $\frac{9}{30}$, entre otras.

Con esta actividad los estudiantes logran concretar más el concepto de facciones equivalentes, ya que ellos podían manipular y jugar con el material a formar varios grupos con el mismo número de botones.

Actividad #4

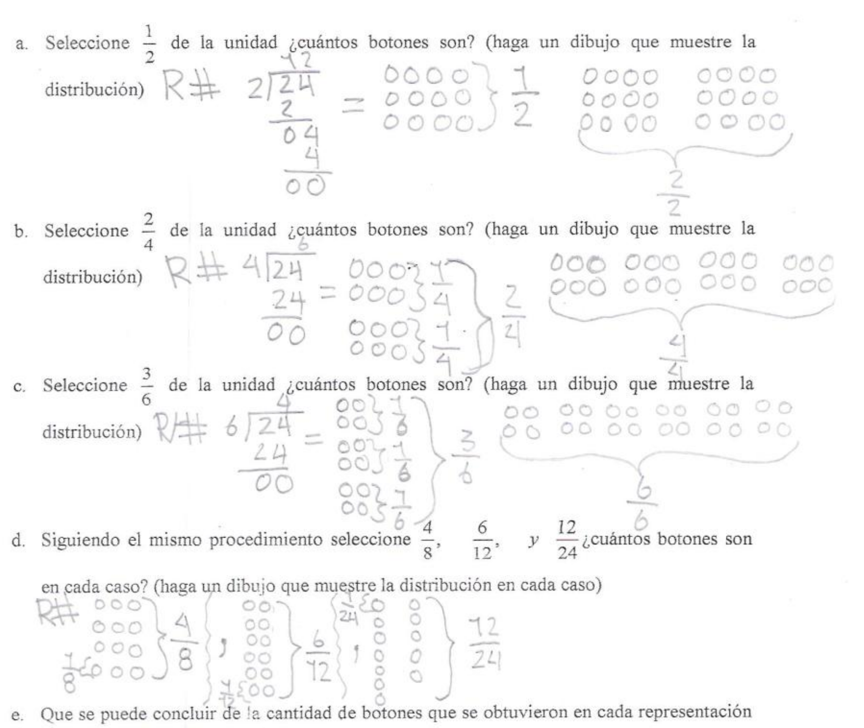
Utilizando 24 botones como la unidad

a. Seleccione $\frac{1}{2}$ de la unidad ¿cuántos botones son? (haga un dibujo que muestre la distribución)
b. Seleccione $\frac{2}{4}$ de la unidad ¿cuántos botones son? (haga un dibujo que muestre la distribución)
c. Seleccione $\frac{3}{6}$ de la unidad ¿cuántos botones son? (haga un dibujo que muestre la distribución)
d. Siguiendo el mismo procedimiento seleccione $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{12}$, *y* $\frac{12}{24}$ ¿cuántos botones son en cada caso? (haga un dibujo que muestre la distribución en cada caso)

e. Qué se puede concluir de la cantidad de botones que se obtuvieron en cada representación de las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{12}{24}$

f. ¿Cómo le llamaríamos a estas fracciones?

Las soluciones propuestas por los equipos de trabajo fueron satisfactorias, todos concluyen en la misma solución de una manera muy clara, en donde se evidencia que han comprendido el concepto de fracciones equivalentes. A continuación se presenta el razonamiento de uno de los equipos:



a. Seleccione $\frac{1}{2}$ de la unidad ¿cuántos botones son? (haga un dibujo que muestre la distribución) R#

b. Seleccione $\frac{2}{4}$ de la unidad ¿cuántos botones son? (haga un dibujo que muestre la distribución) R#

c. Seleccione $\frac{3}{6}$ de la unidad ¿cuántos botones son? (haga un dibujo que muestre la distribución) R#

d. Siguiendo el mismo procedimiento seleccione $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{12}$, *y* $\frac{12}{24}$ ¿cuántos botones son en cada caso? (haga un dibujo que muestre la distribución en cada caso) R#

e. Que se puede concluir de la cantidad de botones que se obtuvieron en cada representación de las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{12}{24}$

R# Todas representan la mismo cantidad representada en diferente forma.

f. ¿Cómo le llamaríamos a estas fracciones?

R# Equibalentes.

Es evidente que con las representaciones de los diagramas y utilizando material que ellos puedan manipular facilita en gran medida la comprensión de las fracciones equivalentes, ya que para el alumno resulta difícil llegar a concluir que dos fracciones que están escritas con diferentes números puedan representar la misma cantidad, sin embargo cuando ellos tienen las vivencias como la anterior ellos comprueban que si es posible y logran formular su propio significado.

En conclusión con el desarrollo de esta guía de laboratorio se lograron los objetivos propuestos, los equipos de trabajo respondieron muy bien en cada una de las actividades, se observó mucha motivación de parte de ellos. A la vez se han sentando las bases para que el alumno pueda comprender fácilmente la ampliación y la simplificación de fracciones.

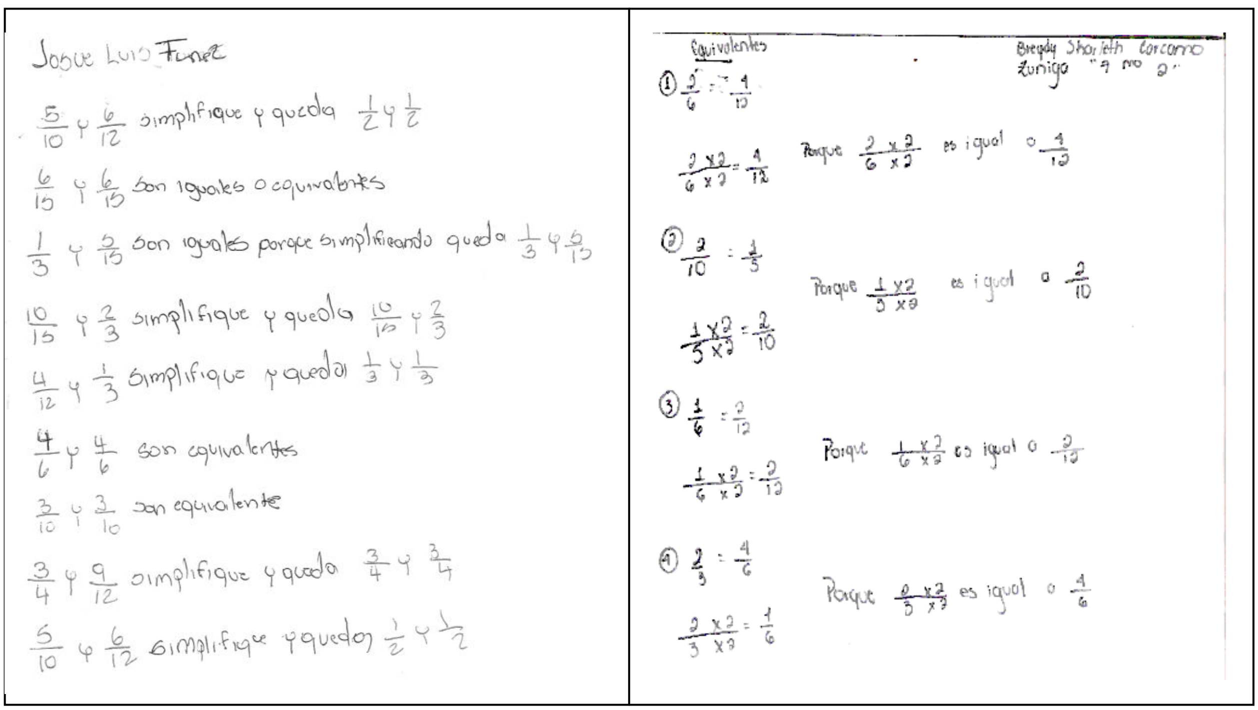
4.2.4 Juego #1: Carta de fracciones

El juego de cartas de fracciones (ver anexo 12) se aplicó con el objetivo de que el estudiante pusiera en práctica los conocimientos que tenia acerca de fracciones equivalentes y ejercitara su memoria, para que de una forma divertida continuara aprendiendo. Este juego se realizó en equipos, dos de cuatro y dos de tres integrantes, en donde se les distubuyó las cartas, se les proporcionó las instrucciones y las reglas del juego, el cual consistía en lo siguiente:
A cada equipo se le proporcionaba un juego de 98 cartas, 48 cartas de color azul inscritas en ellas fracciones propias y 48 cartas rojas con las mismas fracciones, luego al interior de cada equipo seleccionaban el que debía revolver y repartir 6 cartas a cada uno el resto de las cartas se colocaban en el centro de la mesa, para comenzar a jugar uno de los jugadores toma dos cartas de la pila de cartas que se tenían en la mesa, luego buscaba en el grupito de cartas que el tenia, y verificaba si podía formar alguna pareja de cartas equivalentes, de no ser así las descartaba en otra pila que también se colocaba en el centro de la mesa a disposición de los jugadores, y continuaba el siguiente jugador con la misma dinámica. El juego finalizaba cuando se terminaban las cartas de la mesa, al final él que obtuviera más grupos de fracciones equivalentes era el ganador del equipo.

El desempeño de los equipos fue muy bueno, se puedo apreciar, que se encontraban muy motivados jugando con las cartas, utilizaban papel y lápiz para apoyarse, en donde anotaban las parejas de fracciones equivalentes que encontraban, para llevar un control, cuando se les terminaban las cartas entonces hacían el conteo de los grupos que había encontrado cada uno y de esta forma determinaban quien era el ganador.

Para que este juego tenga éxito es necesario que los alumnos hayan tenido experiencias con las fracciones equivalentes, en este caso ellos ya habían desarrollado la guía de laboratorio, y previo al juego se realizó una sesión en la que los alumnos expresaron las conclusiones a las que habían llegado en la guía, a la vez se mostró las formas en las que podían encontrar fracciones equivalentes (simplificación y ampliación), y de esta forma estaban listos para jugar.

A continuación se presentan algunas de las parejas de fracciones equivalentes que encontraron dos jugadores:



En el desarrollo del juego se evidencia la forma en como los estudiantes utilizan la simplificación y la ampliación de fracciones para concluir que son equivalentes.

En resumen se puede concluir con que la aplicación de este juego fue muy provechosa, ya que el alumno aplica lo aprendido y al mismo tiempo se divierte, puesto que es bueno que al estudiante se le muestre la parte divertida de las matemáticas. Cabe aclarar que el juego de las cartas se puede aplicar también para afianzar otras interpretaciones del concepto de fracción.

4.2.5 Guía de trabajo # 4

Esta guía (ver anexo 7) se aplicó con el objetivo de que el alumno afianzara el conocimiento adquirido sobre fracciones equivalentes, y a la vez utilizara la representación de fracciones en la recta numérica para establecer la relación de orden entre ellas, siendo esta un buen recurso para poder ordenar ya sea en forma creciente o decreciente cualquier serie de números fraccionarios.

Previo a la realización de esta guía se desarrollo una sesión de trabajo en la que se discutieron las actividades y guías anteriormente hechas sobre este tema, a la vez se resolvieron varios problemas y ejercicios, despejando dudas y tomando en cuenta las reflexiones de los estudiantes.

El desarrollo de esta guía se llevó a cabo en forma individual. A continuación se detallan los problemas y ejercicios presentados:

1. Escriba el signo <, > ó = según corresponda

2. $-\frac{1}{5}\ (\quad)\ \frac{5}{9}$

3. $-2\frac{1}{5}\ (\quad)\ 2\frac{2}{5}$

4. $\frac{3}{10}\ (\quad)\ \frac{2}{7}$

6. $1\frac{1}{4}\ (\quad)\ \frac{5}{4}$

5. $-\frac{5}{8}\ (\quad) -\frac{15}{24}$

7. $\frac{3}{10}\ (\quad)\ -\frac{3}{10}$

En el desarrollo de este ejercicio los alumnos respondieron en forma correcta cada uno de los reactivos, para ello empleaban la multiplicación cruzada, y comparaban los resultados, ya que se les hacía más fácil, determinar la relación de orden con números enteros, por ejemplo en el inciso (a), (b) algunos alumnos respondían sin efectuar ninguna operación justificando que las cantidades negativas siempre serán menores que las cantidades positivas, en el caso de inciso

(e) convirtieron la fracción mixta a impropia y luego multiplicaron en cruz. No se presentaron errores, identificaron muy bien las fracciones equivalentes y respondían con mucha soltura y seguridad cada inciso.

Es importante aclarar que el uso de estas estrategias para identificar la relación de orden entre las fracciones, surgió después de que se había realizado las actividades de la guía de laboratorio y el juego, como producto de las reflexiones realizadas por los estudiantes en conjunto con la maestra.

Con el propósito de que el alumno encontrar fracciones equivalentes dándole un denominador determinado se le presenta el siguiente problema:

2. Escribe una fracción equivalente a $\frac{2}{5}$ con denominador 30.

Todos los estudiantes lograron hacer correctamente este problema, puesto que anteriormente se habían realizado muchas actividades sobre ese tema, por lo que se esperaba que el estudiante no presentara dificultades. Para resolverlo hicieron uso de la ampliación de fracciones.
La solución que propone una estudiante es la siguiente

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{12}{30}$$

En ella se refleja que hay un entendimiento claro de cómo encontrar las fracciones equivalentes por ampliación.

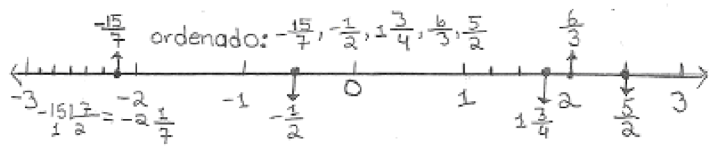
Luego de que ellos establecen la relación de orden entre fracciones se les da los problemas 3 y 4 en donde se les sugiere hacer uso de la representación gráfica de fracciones para poder ordenar la serie.

3. Represente en la recta numérica y ordene las fracciones de menor a mayor: $\frac{6}{3}, -\frac{15}{7}, \frac{5}{2}, 1\frac{3}{4} \; -\frac{1}{2}$

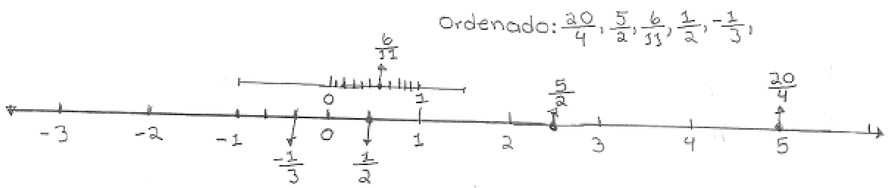
4. Represente en la recta numérica y ordene de mayor a menor las fracciones: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{6}{11}, \frac{20}{4}, \ \frac{5}{2}$

Con las respuestas a los reactivos se evidencia que no hubo dificultad en la representación de las fracciones en la recta, lo que les facilitó ordenar cada serie. La respuesta de un alumno fue la siguiente:

Reactivo 3



Reactivo 4



De igual forma respondieron los demás estudiantes, se puede apreciar en sus respuestas, que en el caso de las fracciones impropias las convertían a mixtas para ubicarlas con mayor facilidad en la recta. Esto significa que los estudiantes han logrado la comprensión debida sobre la representación grafica, ya que lo hacen muy bien y no presentaron ninguna dificultad.

Con el objeto de afianzar la ampliación y simplificación de fracciones se les presentó el problema 5 y 6.

5. Escriba tres fracciones equivalentes para cada una de las siguientes

   a. $\frac{4}{7}$

   b. $\frac{1}{2}$

   c. $-\frac{3}{4}$

En este problema y sus incisos hubo mucha variedad en las respuestas, ya que fracciones equivalentes por ampliación se pueden encontrar todas las que queramos, pero las más comunes fueron las fracciones que resultan de multiplicar cada fracción por 2, 3, 4. En el desarrollo de cada inciso no se presentó ninguna dificultad ni se detectaron errores, ya que en los problemas anteriores ya habían mostrado evidencia de entender muy bien este concepto.

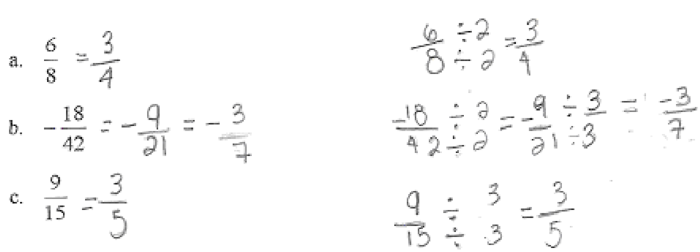
6. Reduzca las siguientes fracciones a su mínima expresión

   a. $\frac{6}{8}$

   b. $-\frac{18}{42}$

   c. $\frac{9}{15}$

De igual forma que en el problema anterior, el desenvolvimiento de los estudiantes fue muy acertado, coincidiendo todos con las respuestas, ya que este caso es diferente al anterior, todos ellos utilizaron en su mayoría los cálculos mentales, lo que comúnmente se hace, es decir por ejemplo en el inciso (a) en la fracción $\frac{6}{8}$ obtenían la mitad de 6 y la mitad de 8 lo que resultaba $\frac{3}{4}$, y así en todos los demás incisos, sin embargo hubieron respuestas de algunos de ellos en donde mostraron la evidencia de la división que hacían en cada caso. Se puede apreciar en la solución que presentó una alumna:



a. $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $\qquad \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$

b. $-\frac{18}{42} = -\frac{9}{21} = -\frac{3}{7}$ $\qquad \frac{-18 \div 2}{42 \div 2} = \frac{-9 \div 3}{21 \div 3} = \frac{-3}{7}$

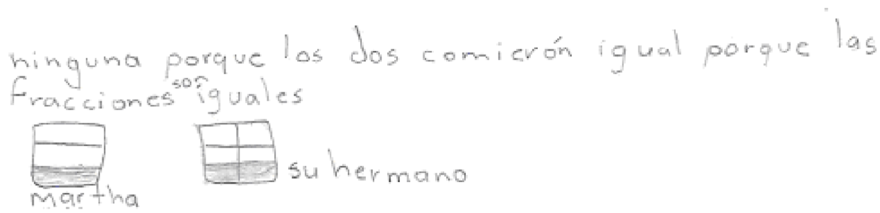
c. $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ $\qquad \frac{9 \div 3}{15 \div 3} = \frac{3}{5}$

En la siguiente sección de la guía se les presentaron dos situaciones de la vida diaria en donde debían emplear la relación de orden para dar respuesta:

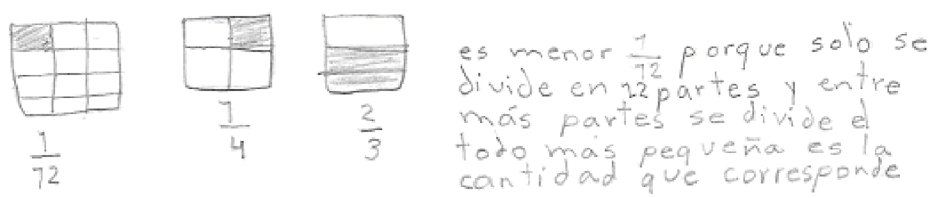
7. Resuelva las siguientes problemas
    a. Marta ha comido $\frac{1}{3}$ de una galleta de chocolate y su hermano comió $\frac{2}{6}$ ¿quién comió más?
    b. Se divide un solar en 3 partes: $\frac{1}{12}$ para un campo de fútbol, $\frac{1}{4}$ Para una escuela y $\frac{2}{3}$ para un jardín ¿Cuál de las tres partes es menor? Explique

En las soluciones que los alumnos presentaron se identificaron dos estrategias, una de ellas fue el uso de diagramas como en el caso de Yasmin:

a)



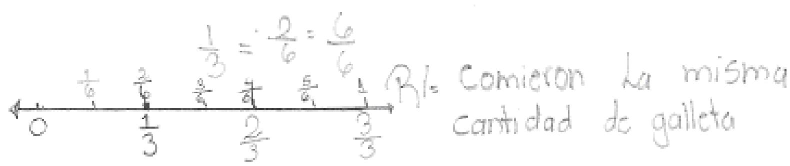
b)



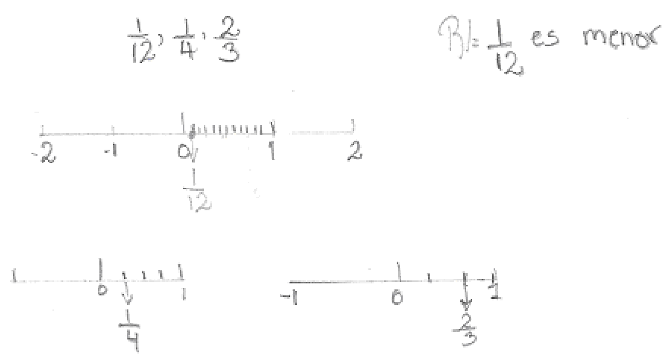
Esta estrategia fue utilizada por la mayoría de los estudiantes, en donde los diagramas les permitieron visualizar fácilmente la solución, principalmente en el inciso (a) que son fracciones equivalentes, sin embargo hubo una alumna que presentaba una duda ya que ella relacionaba el tamaño de los pedazos de la galleta y ella respondía que el hermano comía más por que la galleta estaba dividida en menos partes y por lo tanto los pedazos eran más grandes, pero cuando hizo el diagrama visualizó que al final se comían la misma cantidad de la galleta, y en la discusión con sus compañeros lograron que superara la dificultad. En el caso del inciso (b), se puede apreciar que el razonamiento que hizo la estudiante, lo hace en base al diagrama, en donde se ve claramente que hace una relación entre los denominadores y el número de particiones que se hizo en el terreno asumiendo que este es de igual tamaño aunque en la figura no se aprecie muy bien.

La otra estrategia que fue utilizada por dos estudiantes es la de representar las fracciones en la recta numérica para determinar cual es la mayor o si ocupan el mismo punto, se aprecia en la respuesta de uno de ellos:

a)



b)



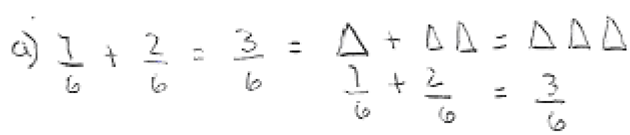
En esta forma de resolver los problemas se observa que hay una buena comprensión de la representación de fracciones en la recta numérica, y que es un buen recurso para poder determinar la relación de orden entre ellas.

Todas las respuestas presentadas por los estudiantes muestran un buen dominio al trabajar problemas que involucren la relación de orden en las fracciones; de tal forma que se puede concluir, que ellos han superando las dificultades y errores que se detectaron en el problema presentado en el diagnóstico. A la vez se evidencia el desarrollo de diferentes estrategias para resolver un mismo problema, lo que significa que han enriquecido sus conocimientos acerca del concepto de fracción en las interpretaciones vistas hasta el momento, y que las, reflexiones y actividades que se han desarrollado en las sesiones de trabajo presentaron su fruto.

4.2.6 Guía de trabajo # 5

Con la aplicación de esta guía de trabajo (ver anexo 8) se pretendía explorar las diferentes estrategias que los estudiantes utilizaban para resolver situaciones de la vida cotidiana que implican el uso de la suma y resta de fracciones de igual y distinto denominador, a la vez pudieran estimar sumas y restas utilizando la recta numérica, y resolvieran ejercicios usando algoritmos.

Previo al desarrollo de esta guía se llevó a cabo una sesión de trabajo en donde se realizaron actividades con los alumnos, estas consistían en proponer problemas en la pizarra, y en equipos de trabajo intentaban darle solución, luego se generaba la discusión con todo el grupo y la intervención de la profesora, cuando era necesaria, hasta que lograban consensuar su respuesta. Así mismo se resolvieron problemas de suma y resta de fracciones de igual denominador utilizando los hexágonos de papel fomi, lo que contribuyó a una mejor comprensión ya que ellos podían manipular las piezas, todos los ejercicios resueltos los escribían en hojas de trabajo. Por ejemplo se les planteó la suma de $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}$, previo a ello se les proporcionó los hexágonos a cada equipo. Observamos como lo resuelve uno de los equipos; en donde se evidencia la forma como utilizan las piezas del hexágono.



El hexágono esta dividido en 6 triángulos del mismo tamaño, cada uno representa $\frac{1}{6}$ de la unidad, por lo tanto $\frac{3}{6}$ equivalen a tres triángulos.

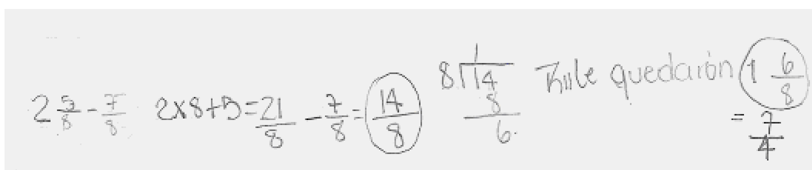
Luego de esta sesión de trabajo en donde se resolvieron varios problemas, se les aplicó la guía en forma individual, en la siguiente sesión.

La guía está conformada por tres partes. La primera corresponde a la resolución de problemas no rutinarios, para ello se les presentó los siguientes problemas con sus respectivos incisos:

1.a. Sandra tenía $2\frac{5}{8}$ kg (kilogramos) de azúcar, pero usó $\frac{7}{8}$ kg para hacer pasteles ¿Cuántos kilogramos de azúcar quedaron?

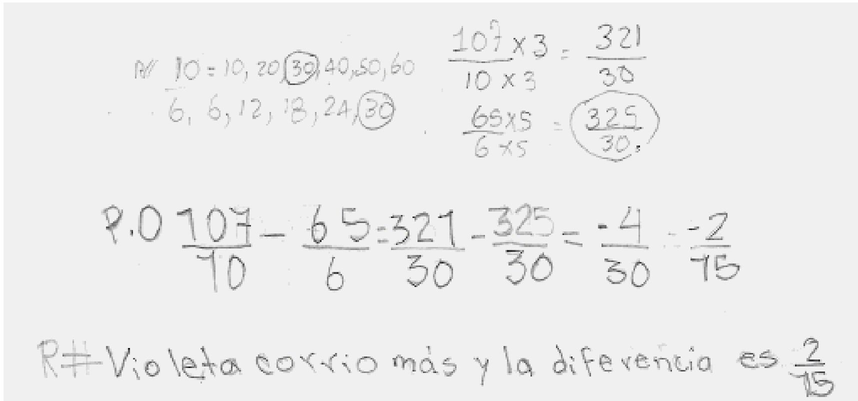
Las soluciones propuestas por los estudiantes coinciden en convertir primero la fracción mixta a impropia antes de realizar la operación, identificaron fácilmente que debían restar para encontrar la respuesta, la cual fue satisfactoria, emplearon correctamente el algoritmo, lo que significa que ya no cometen el error de restar numeradores con numeradores y denominadores con denominadores, siendo éste uno de los errores que se presentó con mayor frecuencia en el diagnóstico.

Se evidencia en la solución propuesta por una alumna, en la que se observa que hacen uso también de la simplificación de fracciones



2.b En una hora, Carmen corrió $\frac{107}{10}$ Km. y Violeta corrió $\frac{65}{6}$ Km. ¿Quién corrió más? ¿Cuánto es la diferencia?

Este problema es de la misma naturaleza que el anterior, con la diferencia que son fracciones de diferente denominador, sin embargo las soluciones presentadas por los estudiantes fueron correctas, la estrategia que ellos emplearon es la de encontrar fracciones que tuvieran un común denominador, es decir equivalentes, siendo estas de gran ayuda ya que las convierten a fracciones de igual denominador, por lo que se comprueba lo que afirma Lamon (2007) que los estudiantes que dominan la interpretación de medida pueden desarrollar nociones fuertes sobre la adición y sustracción de fracción. Lo descrito anteriormente se refleja en la solución que realizó una alumna:



R// 10 = 10, 20, 30, 40, 50, 60

6, 6, 12, 18, 24, 30

$\frac{107 \times 3}{10 \times 3} = \frac{321}{30}$

$\frac{65 \times 5}{6 \times 5} = \frac{325}{30}$

R.O $\frac{107}{10} - \frac{65}{6} = \frac{321}{30} - \frac{325}{30} = \frac{-4}{30} = \frac{-2}{15}$

R# Violeta corrio más y la diferencia es $\frac{2}{15}$

En sus respuestas se evidencia que encuentran el denominador común más pequeño, ósea mínimo común múltiplo y luego aplican la ampliación de fracciones para encontrar las fracciones con el mismo denominador, facilitando la sustracción ya que solo restan los numeradores, y simplifican el resultado.

1.c. Si se colocan $\frac{25}{7}$ kg de frutas en una canasta que pesa $\frac{7}{9}$ kg. ¿Cuánto pesa todo en total?

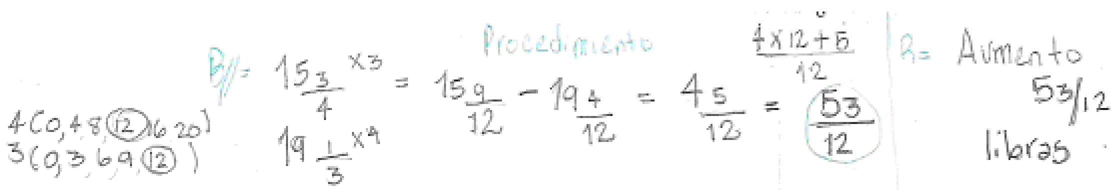
En este problema las estrategias utilizadas fueron las mismas que en el anterior, aclarando que la operación a realizar es la suma de fracciones, no se presentaron dificultades, ni errores. Todos respondieron de forma correcta, coincidiendo que la solución es que el peso de la canasta es $\frac{274}{63}$ Kg. Por lo que se puede concluir que el patrón que ellos han determinado para resolver las operaciones de suma o resta de fracciones con diferente denominador es la de encontrar el denominador común y convertirlas a fracciones de igual denominador.

1.d. Juan pesaba $15\frac{3}{4}$ libras el mes pasado y hoy pesa $19\frac{1}{3}$ libras ¿Cuántas libras aumentó Juan?

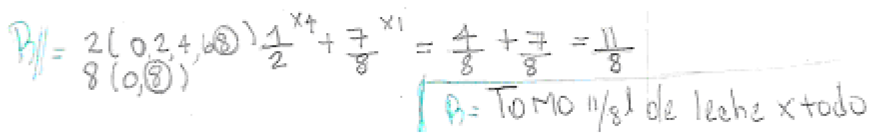
1.e. Julia bebió $\frac{1}{2}$ l de leche en la mañana $\frac{7}{8}$ l en la tarde ¿Cuánta leche tomó por todo?

En los problemas (d) y (e) el desenvolvimiento de los estudiantes fue muy bueno ya que las mismas estrategias utilizadas en la solución de los anteriores la emplearon para responder estos problemas, identificaron correctamente la operación que debían realizar en cada uno. Se evidencia en las respuestas que dominan el algoritmo para la suma y la resta, en donde hacen uso de las fracciones equivalentes por ampliación para encontrar el común denominador. A continuación se presenta la solución propuesta por un estudiante:

Solución inciso (d)



Solución inciso (e)

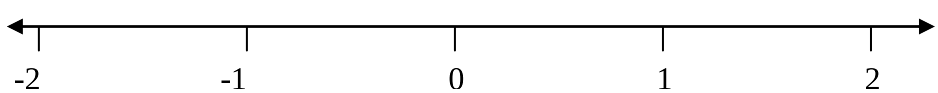


En esta solución se observa que en el inciso (d) trabaja el algoritmo con números mixtos, sin embargo se presentaron soluciones en donde convertían cada número mixto en fracción impropia y luego resolvían la operación, coincidiendo todos en la respuesta.

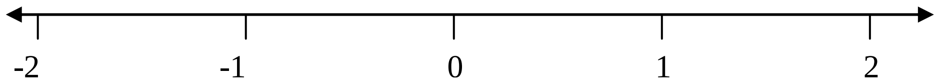
Luego con el inciso (e) no hubo variedad en las respuestas. Considerando otras formas a las cuales el estudiante puede recurrir para resolver sumas y restas de fracciones se les presentó el siguiente problema

2. Resuelva los siguientes problemas, muestre como usaría la recta numérica para encontrar la respuesta.

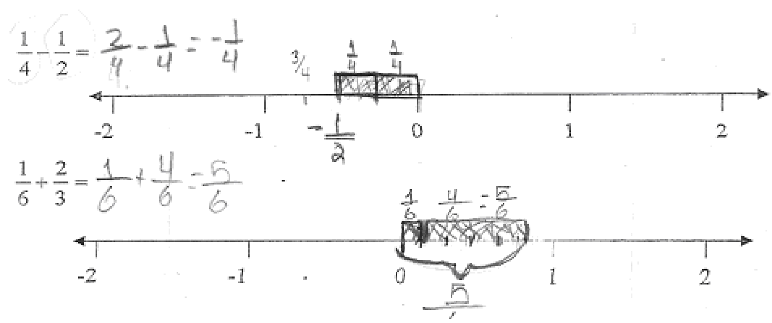
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} =$$



$\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=$



En las respuestas que los estudiantes dieron a estos problemas, se marcan dos formas, una de ellas es que resolvían la suma y la resta utilizando el algoritmo, y solo representaban el resultado en la recta numérica, en donde se evidencia que no presentan dificultad para representar fracciones en la recta, pero no tenían idea de cómo realizar una suma o una resta usando directamente la representación en la recta. En la otra forma utilizada si se evidencia la utilización de la recta para encontrar la solución, tal es el caso que propuso un estudiante:



De la misma forma respondieron 5 estudiantes en donde se observa claramente que en el caso de la resta representan la fracción mayor que en este caso es $\frac{1}{2}$ y luego restan de ella $\frac{1}{4}$, obteniendo como respuesta $-\frac{1}{4}$.

En el caso de la suma, se obtienen denominadores comunes, representan la primera fracción y luego agregan la otra fracción obteniendo como respuesta $\frac{5}{6}$.

Luego se les planteó los siguientes ejercicios

3. Resuelva

a. $\frac{7}{4}+\frac{1}{3}$

b $\frac{11}{12}-\frac{3}{8}$

c $-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$

d $6\frac{3}{4}-2\frac{1}{4}+9\frac{1}{3}$

e $-2\frac{3}{8}-8\frac{1}{8}$

f. $-\frac{1}{4}+\frac{5}{14}-\frac{3}{28}$

Los ejercicios del problema 3 se les presentaron con el objeto que el estudiante practicara el algoritmo de la suma y resta de fracciones o que implementaran otras estrategias para resolverlos, en donde la mayoría se desenvolvió muy bien, utilizando el algoritmo como método para resolverlos, sin embargo se presentó el caso de un alumno que dejó en blanco estos ejercicios, siendo que él había faltado a la sesión de trabajo en donde habíamos desarrollado este tema despejando las dudas de los alumnos, y tratando de que superaran en gran mayoría las dificultades que habían sido detectadas en el diagnóstico y durante el proceso de la sesión.

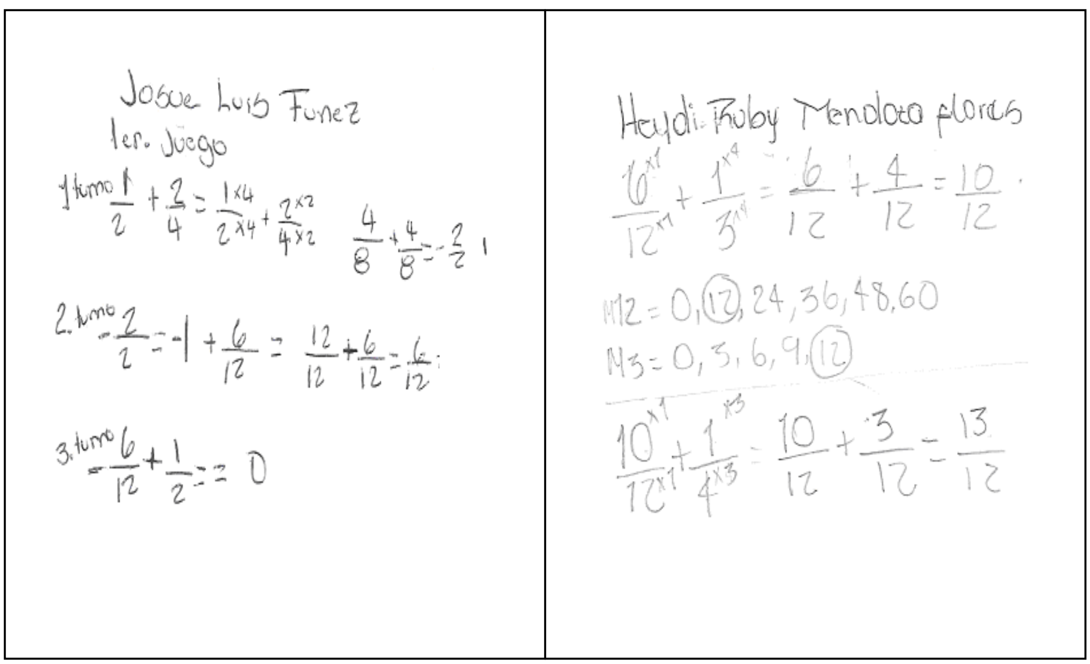
En conclusión los estudiantes mostraron evidencia de haber comprendido la interpretación medida y a la vez relacionarla con la interpretación parte todo. Las dificultades presentadas durante el desarrollo de la guía fueron solventadas mediante reflexiones hechas en las sesiones de trabajo con ayuda de la maestra.

4.2.7 Juego #2: Retorno de fracciones

El juego retorno de las fracciones (ver anexo 13) se aplicó con el objetivo de que los estudiantes afianzaran las estrategias adquiridas para resolver ejercicios de suma y resta de fracciones, a la vez utilizaran la recta numérica como un recurso para tal fin. Para llevarlo a cabo se organizó el grupo en equipos de dos integrantes, a cada equipo se le hizo entrega de una hoja de papel que contenía la recta numérica en grande con varias fracciones propias representadas, un grupo de 25 cartas que contienen diferentes fracciones propias con denominadores 2, 3, 4, 6 12, y un dado con los signos +/-. También hacían uso de lápiz y papel si lo consideraban necesario para realizar las operaciones de suma y resta que le surgían en el juego.

El propósito del juego es partir de cero y retornar al cero, es decir que cada jugador se colocaba en el cero de la recta numérica, y luego cada uno en su turno lanzaba el dado de signos, y tomaba una carta, si el signo era “+” sumaban y si era “-“ restaban la fracción que estaba en la carta seleccionada con la fracción de la posición actual del jugador en la recta , lo hacían repetidamente hasta que la suma o resta le diera cero.

En el desarrollo de este juego los estudiantes se encontraban muy motivados, cada equipo dejó constancia de las operaciones realizadas en una hoja de papel, en donde se observa que lo jugaron varias veces, ganando varios juegos. En la realización de las operaciones que se les presentaron a medida desarrollaban el juego se puede apreciar que lo hicieron usando el algoritmo. Cabe mencionar que ya en el desarrollo de este juego no se presentaron dificultades, ya que anteriormente se habían realizado varias actividades y guías que afianzaban la suma y resta de fracciones. A continuación se presenta las operaciones que realizaron dos alumnos en el juego:



En resumen el desarrollo de este juego fe muy provechoso, ya que se logró confirmar en gran medida que las dificultades presentadas anteriormente como ser mal uso del algoritmo de la suma y empleo de la fracciones equivalentes, habían sido superadas, contribuyendo así a una mejor comprensión del resto de las interpretaciones del concepto de fracción.

4.3 Operador

Para esta interpretación se incorporaron dos problemas en el diagnóstico, con el cual se pretendía explorar si el alumno podía establecer la operación que tenía que aplicar para resolverlo, y a la vez si dominaba el algoritmo de la multiplicación y la división.

Para la etapa de ejecución se realizaron actividades en clase con los alumnos en las que se resolvían problemas con el apoyo de la maestra en el caso que fuera necesario, se tomaba la participación de los alumnos hasta concluir en la solución de cada uno, y luego se realizaron en el aula dos guías de trabajo una en cada sesión las cuales se hicieron en forma individual, para verificar que se había logrado la comprensión sobre esta interpretación.

A continuación se detalla el desempeño de los alumnos en los problemas planteados en el diagnóstico

4.3.1 Problemas de la prueba diagnóstica

Problema # 7

Si se utiliza $\frac{4}{5}$ litros de pintura para trazar un metro de línea ¿Cuántos litros de pintura se utilizarán para trazar 5 metros de línea?

Los resultados obtenidos en este problema se reflejan en el cuadro No 9.

Cuadro No 10

Resultados del Problema #7

Reactivo / Respuestas	7
Correcta	17
Incorrecta	34
En blanco	5

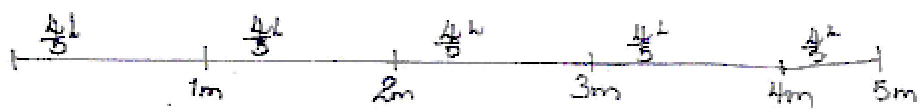
Este problema era referente a una situación de la vida real en el que el alumno podía utilizar el algoritmo de la multiplicación o la recta numérica para resolverlo.

En el cuadro No 10 se puede apreciar que la mayoría (60%) de los estudiantes respondieron en forma incorrecta, donde el error más encontrado común fue la mala implementación del algoritmo, en donde identificaban bien que debían multiplicar, pero al momento de realizar la operación lo plantaban de la siguiente forma: $\frac{4}{5}\times\frac{5}{5}$, en donde se observa que multiplican tanto el numerador como el denominador por cinco. Sin embargo un 30% de los estudiantes respondió en forma correcta, en su mayoría emplearon el algoritmo de la multiplicación, pero se presentaron dos soluciones que utilizaron diferentes estrategias; se observan a continuación:

Estrategia 1

$\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{20}{5}$ de pintura.

Estrategia 2



$\frac{4}{5}\times\frac{5}{1}=\frac{20}{5}$ R/ Se ocupan $\frac{20}{5}$ L de pintura

Las estrategias que se evidenciaron son la suma como es el primer caso y el uso de la recta como el segundo caso, lo que significa que hay una buena comprensión del problema, y ellos establecen su propia ruta para resolverlo.

Problema # 8

Una varita de hierro mide $\frac{7}{8}\,metros\,(m)$ y pesa $\frac{7}{4}$ kilogramos (Kg.) ¿Cuántos kilogramos pesa 1 metro de varita?

Los resultados obtenidos en este problema se presentan en el cuadro N° 9:

Cuadro No 11

Resultados del Problema #8

Reactivo / Respuestas	8
Correcta	1
Incorrecta	36
En blanco	19

El objetivo de este problema es explorar las estrategias que podían emplear los estudiantes para resolverla, a la vez verificar si aplicaban correctamente el algoritmo de la división de fracciones en el caso de que lo utilizaran. Es evidente que el estudiante tiene mucha dificultad para resolver situaciones de esta naturaleza, ya que solamente uno pudo resolverlo correctamente aplicando el algoritmo de la división de fracciones, un gran porcentaje (64%) lo hizo de manera incorrecta, y otro porcentaje considerable (34%) que lo dejo en blanco.

El error más común que se presentó, es la confusión de algoritmos, es decir que aplicaban la multiplicación de fracciones, y en otros casos la suma o la resta, lo que significa que tenían problemas para identificar la operación que debían aplicar para resolver el problema.
También se evidenció el caso de que planteaban la división pero no realizaban correctamente la operación, es decir uso incorrecto del algoritmo.

En las sesiones de trabajo que se realizaron en torno a esta interpretación se consideraron todas las dificultades antes mencionadas para diseñar los problemas y ejercicios que se debían resolver en el aula, tomando la participación activa de los estudiantes, tratando de que ellos descubrieran sus errores, dificultades y que fueran capaces de proponer soluciones y elegir cual era la correcta, en algunas ocasiones hubo apoyo de la maestra, orientándoles en el proceso.
De igual manera se diseñaron las guías de trabajo, con el objetivo de afianzar esta interpretación y superaran las dificultades que se presentaron.

A continuación se detalla el desenvolvimiento de los estudiantes en la guía que se aplicó para esta interpretación:

4.3.2 Guía de trabajo # 6

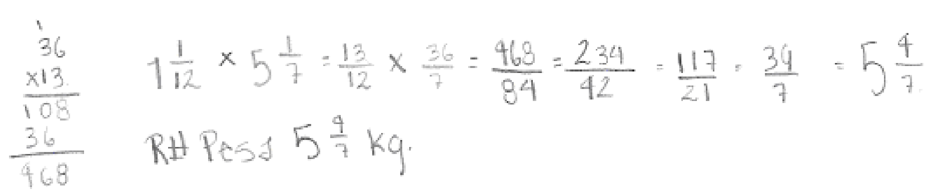
Esta guía (ver Anexo 9) se aplicó con el objetivo de que el estudiante empleara diferentes estrategias para resolver situaciones de la vida cotidiana que impliquen multiplicación de fracciones, de igual manera que dedujeran cuando el producto sería mayor o menor que el multiplicando, ya que según Clarke, Roche, y Mitchell, (2007) se presenta muy a menudo el uso del concepto erróneo de que la multiplicación hace más grande y la división hace más pequeño.

La guía esta compuesta por dos fases, en la primera se les presentan cinco problemas y en la segunda 3 ejercicios, en donde se pretende ejerciten el algoritmo de la multiplicación.

A continuación se detalla el desenvolvimiento de los alumnos en el desarrollo de cada problema:

1.a. Si un litro de jugo pesa $1\frac{1}{12}$ Kg., ¿cuánto pesan $5\frac{1}{7}$ Kg. de ese jugo?

En este problema se les presentó la multiplicación de fracciones utilizando números mixtos, en donde todos los estudiantes coincidieron en convertir los números mixtos a fracciones impropias y luego aplicaron correctamente el algoritmo dejando la respuesta como número mixto. Cabe mencionar que el método utilizado fu propuesto por ellos desde un inicio, ya que no se puede perder de vista que este contenido es abordado desde el tercer grado, aunque existe otro método para resolver multiplicación de números mixtos, se les dio a conocer pero no se les impuso. Veamos la solución que propone una alumna:



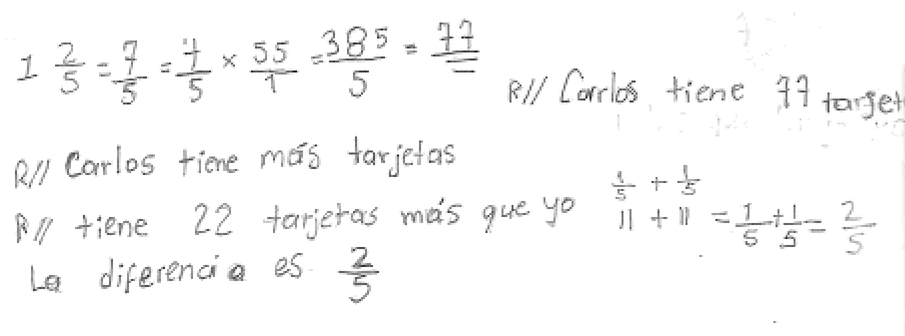
Al igual que la estudiante los demás resolvieron el problema de la misma forma, se observa que emplearon correctamente la simplificación de fracciones.

1.b. Carlos tiene $1\frac{2}{5}$ tarjetas de baloncesto de lo que yo tengo. Yo tengo 55 tarjetas

¿Cuántas tarjetas tiene Carlos?

¿Quién tiene más tarjetas, Carlos o yo?, ¿Cuántas más? en fracción

Al igual que en el problema anterior los alumnos optaron por convertir el número mixto en fracción impropia, luego resolvieron la multiplicación sin ninguna dificultad, a pesar de que en el diagnóstico la mayoría de los alumnos no pudieron resolver el problema cuando el multiplicando era un número entero. La estrategia que ellos usaron fue de colocar denominador uno al 55 para convertirlo en fracción, se evidencia en la solución que propone uno de los estudiantes:



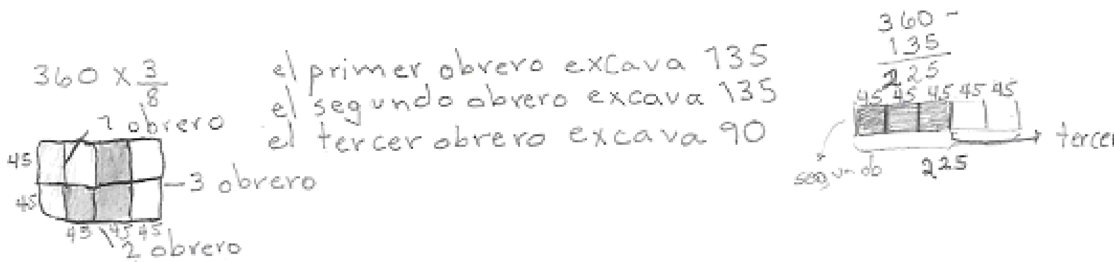
El la respuesta de la segunda pregunta todos coinciden con que la diferencia es 22 tarjetas, sin embargo fueron pocos los que la respondieron usando fracciones, lo que puede ser debido al tipo de la pregunta y el contexto empleado.

1.c. Si se utilizan $\frac{7}{5}$ litros de pintura para trazar 1 metro de línea ¿Cuántas litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{2}{3}m$ de línea?

En las soluciones planteadas en este problema la mayoría fueron correctas, 11 alumnos coincidieron que la solución es $\frac{14}{15}$ litros de pintura, sin embargo hubo tres alumnos que aplicaron la división de fracciones, encontrando un resultado erróneo. Lo que significa que se deben trabajar más actividades que contribuyan a reafirmar el concepto de la multiplicación.

1.d. Entre tres obreros tienen que excavar 360 metros. Si el primero realiza $\frac{3}{8}$ del total, el segundo $\frac{3}{5}$ del resto y el tercero lo que falta para terminar, ¿Cuántos metros excavan cada uno?

En este problema se presentaron ciertas dificultades, ya que algunos estudiantes no tenían idea de cómo resolverlo, por lo que generó una discusión entre el grupo, y producto de eso surgieron algunas estrategias que proponían para resolverlo, la más evidenciada fue la de usar un diagrama representando los 360 metros divididas en 8 partes de 45 metros cada uno y luego hacer la repartición a cada obrero, veamos la solución de una alumna:



En esta solución se observa que no se basó en la multiplicación de fracciones, se basó en los diagramas para dar respuesta, sin embargo hubo soluciones en donde implementaron el algoritmo de la multiplicación y la resta para responder el problema.

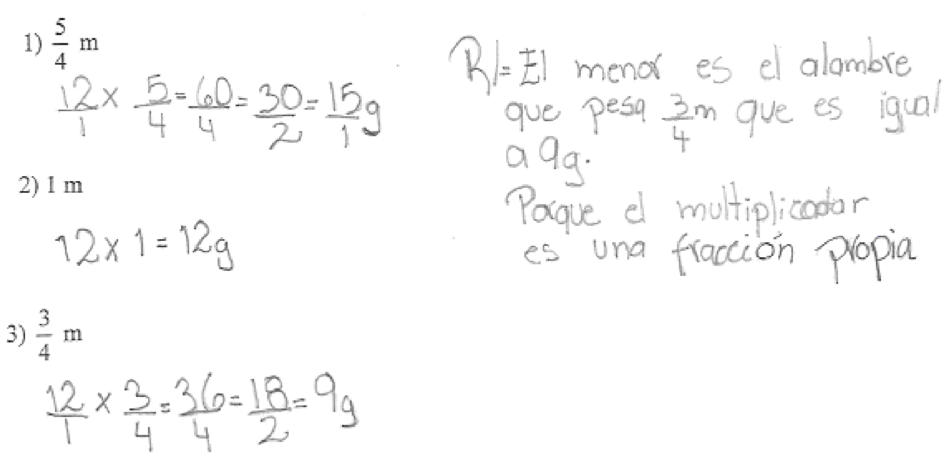
1.e. Si 1 m de alambre pesa 12 g, ¿cuántos gramos pesan los alambres con las siguientes longitudes? ¿cuál pesa menos que el de 12 g? Explique

1) $\frac{5}{4}$ m

2) 1 m

3) $\frac{3}{4}$ m

Las soluciones planteadas para este problema fueron correctas, todos aplicaron muy bien el algoritmo de la multiplicación de fracciones, se logro que ellos identificaran la razón por la que el producto era menor que el multiplicando, concluyendo que cuando el multiplicador es una fracción propia entonces el producto es menor que el multiplicando, esto se evidencia en la respuesta que da un estudiante:



1) $\frac{5}{4}$ m

$\frac{12}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{60}{4} = \frac{30}{2} = \frac{15}{1}g$

R/= El menor es el alambre que pesa $\frac{3}{4}$m que es igual a 9g.
Porque el multiplicador es una fracción propia

2) 1 m

$12 \times 1 = 12g$

3) $\frac{3}{4}$ m

$\frac{12}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{36}{4} = \frac{18}{2} = 9g$

Las demás soluciones son parecidas a la que se ve en la figura anterior, logrando así que ellos tengan claro cuando el producto será menor que el multiplicando.

2. Resuelva
    a. $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$
    b. $\left(-6\frac{3}{4}\right)\left(-1\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$
    c. $3 \times \frac{5}{9}$

Con el propósito de que el estudiante ejercitara el algoritmo de la multiplicación o implementaran otras estrategias se les planteó los ejercicios del inciso (a), (b) y (c), en los cuales los alumnos se desenvolvieron muy bien, no se encontraron errores en las soluciones, ni se presentaron dificultades.

En conclusión con el desarrollo de esta guía se evidenció que los estudiantes lograron independencia, y madurez al trabajar con fracciones, han definido sus propias estrategias y las dificultades han disminuido.

4.3.3 Guía de trabajo # 7

Basándose en los resultados obtenidos en el diagnóstico se desarrolló con los estudiantes una sesión de trabajo en la que se planteo una variedad de problemas con el objeto de que el estudiante lograra identificar cuando debe multiplicar o dividir fracciones para resolverlos, ya que según el NCTM (2000) los estudiantes presentan problemas conceptuales precisamente en la multiplicación y división de fracciones, siendo de esta manera que cuando se dan situaciones en las que hay que dividir o multiplicar fracciones no pueden identificar que deben hacer.

También se llevaron acabo actividades que contribuyeron a aclara por que en algunas divisiones el cociente era mayor que el dividendo. Luego del desarrollo de esta sesión se procedió a la realización de una guía de trabajo (ver anexo 10), con el objetivo de que afianzaran lo aprendido en la sesión, la cual la hicieron en forma individual en la que el apoyo de la maestra fue mínimo solo en caso de que el alumno presentara dificultades. A continuación se detalla el desempeño de los alumnos en cada uno de los problemas planteados en la guía.

1.a. Se regaron $3\frac{9}{14}$ litros de agua en $2\frac{19}{28}$ m^2 de arríate ¿cuántos litros de agua se usaron para regar1 m^2 ?

Los catorce estudiantes coinciden con que deben dividir para resolver el problema, por lo que en todas las soluciones se evidencia el uso del algoritmo de la división, en donde antes de aplicarlo convierten los números mixtos a fracciones impropias y luego realizan la operación; se puede apreciar en la solución que da una alumna:

R/ Se usaron $1\frac{9}{25}$ litros de agua.

P.O $= 3\frac{9}{14} \div 2\frac{19}{28} = \frac{51}{14} \div \frac{75}{28} = \frac{51}{14} \times \frac{28}{75} = \frac{1428}{1050} = \frac{714}{525} = \frac{238}{175} = \frac{34}{25} = 1\frac{9}{25}$

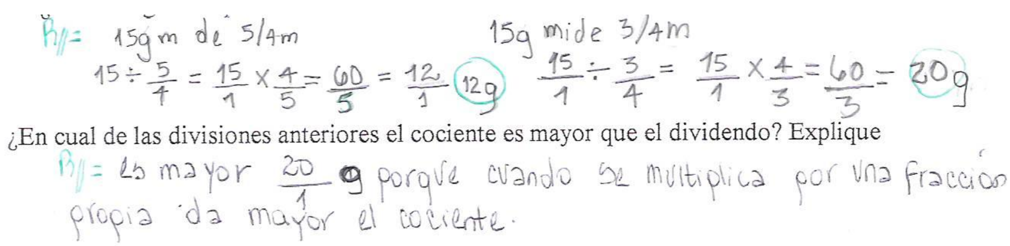
Aunque todos coincide con el uso del algoritmo no todos simplifican la respuesta, es decir que hubieron soluciones en donde encontraban el resultado pero no simplificaban, pero en la solución que se ve anteriormente concluye en la respuesta hasta que llega a la mínima expresión.

1.d. Hay 2 alambres cada uno pesa 15 g. uno de ellos mide $\frac{5}{4}$ m de longitud y el otro $\frac{3}{4}$ m. ¿Cuántos gramos pesa 1m de cada uno de estos alambres?

¿En cual de las divisiones anteriores el cociente es mayor que el dividendo? Explique

Con el objetivo de que el estudiante encontrara el motivo por el que en algunas divisiones el cociente es mayor que el dividendo se les planteó el problema del inciso (d), en el que todos lo resolvieron utilizando el algoritmo, y encontraron la solución correcta, no se presentaron dificultades, ni se detectaron errores. Por lo que se puede concluir que las actividades que se desarrollaron en la sesión de trabajo anterior presentaron buenos resultados.

Veamos la solución que dio un estudiante:



R/= 15g m de 5/4m   15g mide 3/4m

$15 \div \frac{5}{4} = \frac{15}{1} \times \frac{4}{5} = \frac{60}{5} = \frac{12}{1}$ 12g $\frac{15}{1} \div \frac{3}{4} = \frac{15}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{60}{3} =$ 20g

¿En cual de las divisiones anteriores el cociente es mayor que el dividendo? Explique

R/= es mayor $\frac{20}{1}$ g porque cuando se multiplica por una fracción propia da mayor el cociente.

Después de resolver los problemas se les dio una serie de ejercicios con el propósito de ejercitar la división de fracciones y contribuir a erradicar los problemas de confusión que se presentó en el diagnóstico.

2. Calcule

a. $4 \div \frac{3}{5}$

b. $\left(-\frac{3}{7}\right)\div\left(-2\frac{4}{5}\right)$

d. $3\frac{3}{4}\div 1\frac{2}{7}$

c. $\left(\frac{3}{8}\right)\div\left(-\frac{4}{5}\right)$

En la realización de estos ejercicios utilizaron con mucha facilidad el algoritmo, no se presentaron dificultades, y se observó mucha independencia de parte de ellos.

En conclusión con el desarrollo de esta guía, se puede concluir que la mayoría de los errores que se presentaron en el diagnóstico fueron superados, por lo que se puede decir que fue provechoso, pero no suficiente, es decir que se pueden realizar otras actividades que enriquezcan el entendimiento de esta interpretación.

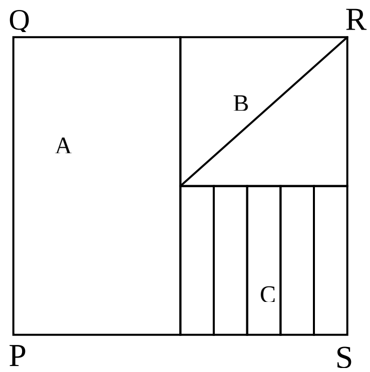
Con el desarrollo de esta guía se culmina el trabajo de las interpretaciones del concepto de fracción que se tomaron en cuenta en este estudio, para lo que se determinó aplicar una ultima guía en la que se involucran las tres interpretaciones estudiadas a manera de valorar el desarrollo del proyecto y el desempeño de los estudiantes.

4.4 Evaluación Final

Con el objetivo de evaluar la comprensión que cada uno de los estudiantes alcanzó sobre las interpretaciones desarrolladas en este estudio, se aplicó la octava guía (ver anexo 11), en donde se les planteó situaciones parecidas a las presentadas en el diagnóstico considerando las tres interpretaciones(parte-todo, medida y operador), pretendiendo que el alumno expresara las diferentes estrategias para resolver cada problema, y esperando que no se presentaran dificultades ni se detectaran los errores que se encontraron en el diagnóstico.

A continuación se detalla el desempeño de los estudiantes en cada problema:

1. Dado el siguiente rectángulo PQRS como la unidad indique la fracción que representa cada letra

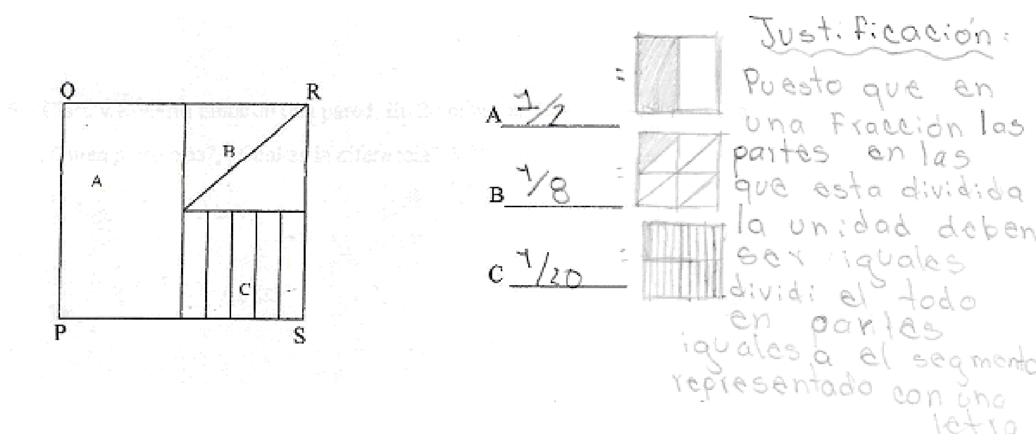


A__________

B__________

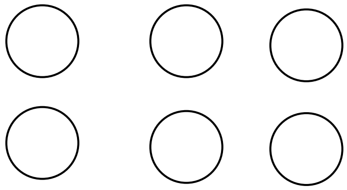
C __________

Como se explicó anteriormente este problema es uno de los que resolvieron en el diagnóstico, con la diferencia que las fracciones representadas eran otras, en aquel momento la mayoría (67%) respondieron en forma incorrecta, pero en esta ocasión el 100% respondió de forma correcta. en sus respuestas se evidencia el uso de diagramas como estrategia para encontrar la solución, por lo anterior se puede concluir que los estudiantes superaron las dificultades antes encontradas. A continuación se presenta la solución que dio uno de ellos:



Al igual que este estudiante cada uno hace su propia justificación, pero todos concluyen en la misma solución.

2. Estas pelotas representan $\frac{1}{4}$ de las que posee Elizabeth. dibuja las pelotas que hacen falta para completar la colección de Elizabeth

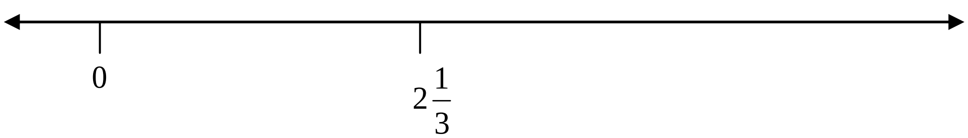


En la solución de este problema no se presentaron dificultades, la estrategia más usada fue de dibujar 3 grupos de 6 pelotas cada una para completar la unidad. Por lo que se puede concluir que el estudiante ha comprendido la interpretación parte todo, ya que según Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) un alumno ha logrado el entendimiento en esta interpretación cuando ha comprendido las siguientes situaciones

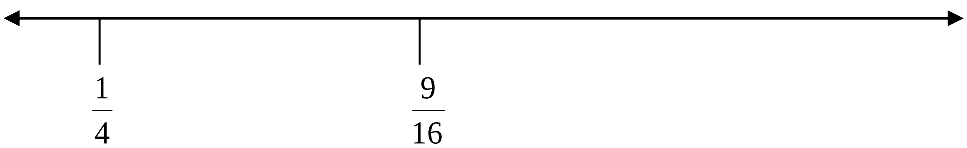
- Las partes juntas deben de ser igual al tamaño del todo
- Poder dividir el todo en partes iguales
- Las relaciones entre el todo y las partes se conserva sin tener en cuenta el tamaño y la forma.

De la misma forma que en el diagnóstico se les presentaron cuatro problemas referentes a la interpretación medida.

3. Ubique el uno en la recta numérica



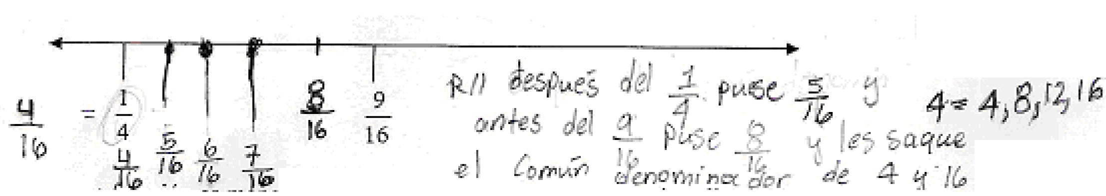
4. Encuentre dos fracciones ubicadas ente $\frac{1}{4}$ y $\frac{9}{16}$



Tanto en el problema 3 como en el 4 se encontró una serie de errores que los estudiantes cometieron en el diagnóstico, sin embargo en esta ocasión las respuestas obtenidas fueron todas correctas, para el caso en el problema 3 algunos utilizaron la estrategia de dividir toda la recta en tercios, y donde estaba 3/3 ubicaban el uno. Se evidencia en la solución que propuso un estudiante:

Por lo que se observa en la respuesta que la relación de orden es un concepto que esta muy claro, y hay un buen dominio de la representación de fracciones en la recta numérica.

Para el problema 4 la estrategia utilizada en un 100% fue la de encontrar fracciones equivalentes por ampliación, endone $\frac{1}{4}$ lo expresan como $\frac{4}{16}$, lo que les facilita encontrar las otras fracciones. Veamos la siguiente solución:



Es evidente que las dificultades que se dieron en el diagnóstico han sido superadas, y que hay un entendimiento claro sobre fracciones equivalentes.

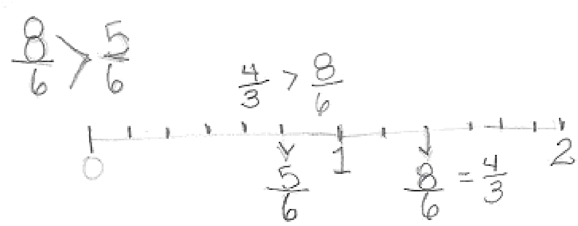
Con el problema 5 se pretendía verificar que estrategia usaban para resolverlo, debido a que se puede encontrar la solución de varias formas.

5. Qué fracción es menor $\frac{4}{3}$ *ó* $\frac{5}{6}$ deje la evidencia de cómo llegó a la respuesta

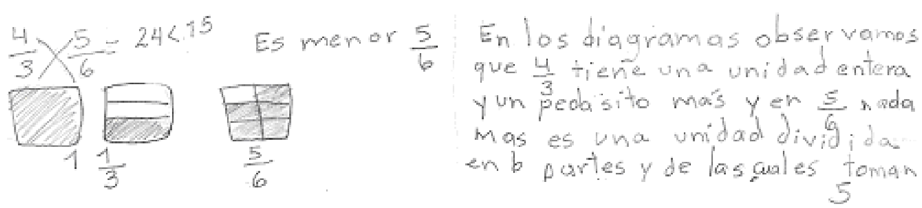
En las soluciones planteadas para este problema se marcaron el uso de tres estrategias; la primera es el uso de la representación grafica, la segunda los diagramas y la tercera el producto cruzado parta comparar números enteros, cada una de las soluciones planteadas independientemente de la estrategia usada la respuesta estaba correcta.

A continuación se presenta la respuesta ejemplificando cada una de las estrategias:

Estrategia 1



Estrategia 2



En las dos soluciones se visualiza las tres estrategias antes mencionadas, al igual que ellos los demás respondieron el problema usando alguna de ellas.

Luego se les planteó el siguiente problema

6. Clara y Roberto pintaron una pared. En 20 minutos, Clara pintó $\frac{3}{4}m^2$ y Roberto $\frac{5}{6}m^2$ ¿Quién pintó más?, ¿Cuál es la diferencia?

La estrategia que usaron los estudiantes para responder este problema es el de convertir las fracciones a un común denominador, es decir $\frac{3}{4}$ la escribieron como $\frac{9}{12}$ y $\frac{5}{6}$ como $\frac{10}{12}$, lo que les facilitó encontrar quien había pintado más. Identificaron que debían restar para encontrar la diferencia y usaron muy bien el algoritmo. Con lo anterior se evaluó interpretación parte – todo y medida.

Con el problema 7 se pretendía evaluar la interpretación operador, explorar que estrategias utilizaban y si no presentaban dificultades para definir la operación que tenían que aplicar.

7. Si se utilizan $\frac{4}{5}$ litros de pintura para trazar 1 m de línea, ¿cuántos litros se utilizan para trazar $1\frac{2}{3}$ m de línea?

La solución que los estudiantes plantean se marca el uso del algoritmo de la multiplicación, no se presentaron dificultades al momento de identificar la operación que se tenía que aplicar, y tampoco hubo errores en las respuestas. Observemos lo que responde uno de los estudiantes:

$$\frac{4}{5} \times 1\frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{15} = \frac{4}{3}$$

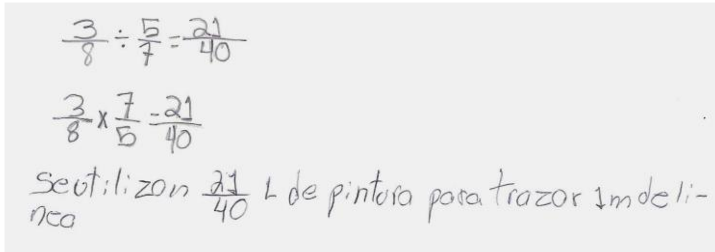
Ͳlll se utilza $1\frac{1}{3}$

En resumen se puede concluir que han logrado establecer la diferencia entre cuando multiplicar y cuando dividir, pero siempre se puede considerar el desarrollo de más actividades que contribuyan a la comprensión de esta interpretación.

Luego se les planteó un problema donde tenían que implementar la división de fracciones para resolverlo

8. Si se utilizan $\frac{3}{8}$ litros de pintura para trazar $\frac{5}{7}$ m de línea, ¿cuántos litros se utilizan para trazar 1m de línea?

Recordando que en el diagnóstico el problema parecido a este no lo resolvió ninguno de los estudiantes, es muy grato apreciar que en esta ocasión fue resuelto correctamente en un 100%, en donde se evidencia que usaron correctamente el algoritmo y no hubo ninguna confusión de operaciones. Lo anteriormente expresado se puede apreciar en la solución que da uno de los estudiantes:



$\frac{3}{8} \div \frac{5}{7} = \frac{21}{40}$

$\frac{3}{8} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{40}$

Se utilizan $\frac{21}{40}$ L de pintura para trazar 1m de li-nea

En conclusión con el desarrollo de esta guía se logró valorar la comprensión obtenida por los estudiantes sobre el concepto de fracción en las tres interpretaciones (parte-todo, medida, operador) consideradas en este estudio, en donde se pudo observar, la independencia con la que ellos se desempeñaban, ya que la intervención de la maestra fue casi nula, y en el análisis se pudo determinar que no habían errores ni dificultades.

En el desarrollo de este estudio se destacó la importancia que tiene darle la oportunidad al estudiante de aprender bajo sus propias estrategias, ya que lo importante es que ellos entiendan el significado de un concepto, en este caso el de fracciones y no memoricen, ya que no es lo más trascendental. Es por ello que es necesario desarrollar actividades que les permita a los alumnos hacer sus propios descubrimientos, trazar diferentes rutas para resolver una situación.

Con respecto al desempeño del grupo, en todo el proceso se puede decir que fue muy satisfactorio, ya que mostraban mucho interés y motivación por seguir aprendiendo. Las intervenciones de la maestra fueron necesarias en muchas ocasiones, pero siempre desempeñando un papel de orientadora del proceso, sin imposiciones.

CAPITULO 4: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

1. El desempeño de los estudiantes durante todo el proceso y el desarrollo de las diferentes guías (de trabajo y de laboratorio) conforman suficiente evidencia para afirmar que estos lograron comprender en su totalidad las tres interpretaciones del concepto de fracción parte-todo, medida, y operador.

2. Las estrategias que los estudiantes utilizaron con mayor frecuencia, las cuales fueron evidenciadas en las guías de trabajo, de laboratorio y los juegos, son las siguientes:

   - Uso de diagramas, en donde el estudiante tenía una representación de la fracción en un dibujo, cuya visualización facilitaba la comprensión, y era más sencillo resolver cualquier situación.

   - Uso de la representación gráfica de fracciones en la recta numérica: básicamente esta era utilizada cuando tenía que ordenar fracciones o serie de estas, en algunos casos se usaba en la suma, en la resta y en la multiplicación de fracciones como una estrategia para poder visualizar la solución de un problema.

   - Utilización de algoritmos: estos eran utilizados más que todo cuando tenían que resolver problemas o ejercicios que involucraran las operaciones básicas con fracciones.

   - Utilización de fracciones equivalentes como herramienta para transformar las fracciones a común denominador, y poder realizar las operaciones entre ellas con mayor facilidad.

Las estrategias antes mencionadas son muy parecidas a las que clasificó Lamon (2006) Behr et al., (1985) según las respuesta que generaron los estudiantes en el estudio que ellos practicaron.

3. Al igual que se clasificaron las estrategias utilizadas por los estudiantes también se encontraron errores al trabajar con situaciones que involucran fracciones, pero cabe aclarar que se dieron con mayor frecuencia en el diagnóstico, lo que significa que durante el proceso estos fueron superados en su mayoría; a continuación se mencionan algunos de ellos; los cuales están ligados con los que encontró Brown, G., y Quinn, R. (2006). En su estudios tales como:

- Mal uso de la recta numérica en la representación gráfica de fracciones
- Mal uso de algoritmos
- Demostración de conceptos erróneos en la relación de fracciones equivalentes con suma de fracciones.
- Extensión lógica de la suma de números naturales
- Errores en el uso de fracciones cuyo denominador es cero.
- Identificar que operación de fracciones deben utilizar en la resolución de un problema, generalmente en la multiplicación y la división.

4. La estrategia de la resolución de problemas resultó muy provechosa, la cual proporcionó varios recursos tanto a la maestra para elaborar las guías de trabajo, guías de laboratorio, como a los alumnos, contribuyendo a desarrollar habilidades, destrezas y una mejor comprensión del concepto de fracción en sus diferentes interpretaciones.

5. Para obtener una mayor comprensión del concepto de fracción y sus interpretaciones, se pueden desarrollar con los alumnos una diversidad de actividades como las siguientes:

- Desarrollo de clases interactivas, en donde se utilice material concreto y semiconcreto, con el objeto de que los alumnos lo manipulen y pueda haber un mejor aprendizaje.

- Guías de laboratorio; con las cuales se puede inducir al alumno a que haga su propio descubrimiento y construcción de un concepto que resulta conflictivo como en el caso de las fracciones.
- Desarrollo de juegos; para afianzar el concepto de fracción en cualquiera de sus interpretaciones. Existe una diversidad de juegos que pueden ser aplicados en diferentes niveles, por lo que cuando se cuenta con tiempo suficiente se pueden aplicar varios de estos, lo que contribuye a mejorar la motivación y despertar el interés por aprender.

- Guías de trabajo; con el objeto de afianzar cada una de las interpretaciones del concepto de fracción se pueden aplicar varias guías ya sea en forma individual, o grupal, fomentando el trabajo de equipo, y lograr que se apoyen entre ellos. A la vez en estas quedan plasmadas las estrategias que ellos utilizan para resolver los problemas y los errores y dificultades que poseen lo que le permite al docente tomar ciertas decisiones, que contribuyan a lograr una mayor comprensión.

Recomendaciones

- Iniciar a los estudiantes desde temprana edad en actividades que les desarrollen la comprensión del concepto de fracción en sus diferentes interpretaciones utilizando la estrategia de resolución de problemas, para evitar la memorización.

- Desarrollar más actividades, guías de trabajo, de laboratorio y juegos en cada una de las interpretaciones, específicamente en operador, ya que debido al tiempo, y a la situación que se había presentado en el país no se pudo hacer más. También se puede realizar un estudio completo, tomando en cuenta las cinco interpretaciones, en donde se involucre la interpretación del concepto de fracción como cociente y razón.

- Darle seguimiento al grupo de estudiantes, en el desarrollo de estrategias cuando utilizan el concepto de fracción en otros contextos y contenidos.

- Dar una continuidad al estudio para tratar de responder otras preguntas que particularmente pienso que se deben investigar, alguna de ellas pueden ser:

¿Qué estrategias y errores presentan los estudiantes en la interpretación del concepto de fracción como cociente y razón?

¿De qué forma se pueden implementar las fracciones para hacer una transición a la enseñanza de los decimales?

¿En qué medida influyen las concepciones erróneas de los estudiantes sobre fracciones en sus estudios posteriores?

De manera general se puede concluir que la realización de este estudio fue muy provechoso tanto para la maestra como para los estudiantes, se aprendieron cosas nuevas y se vivieron nuevas experiencias que contribuyen al crecimiento profesional. Por otra parte se deberá considerar la idea de darle seguimiento a la investigación y a los estudiantes participantes y poder desarrollar las otras interpretaciones (razón y cociente) que no se tomaron en cuenta por los motivos antes mencionados, a si como también hacerlo en otros contextos; de igual forma dar respuesta a las preguntas que se proponen anteriormente y las que puedan surgir en el camino.

REFERENCIAS BIBLOGRÁFICAS

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). *Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Boyer Carl (1968). *Historia de la Matemática* Brooklyn, New York

Brown, G., & Quinn, R. (2006). *Algebra students' difficulty with fractions.*Australian Mathematics Teacher, 62(4), pp. 28-40.

Castellón. L. (2008). *Bilingual Students' Conceptual Understanding of Fractions: An Interactive Interview Approach as a Means to Learn with Understanding*. University of New Mexico

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria. Pearson Education, Madrid*

Charalambous, C., y Pitta-Pantazi, D. (2007, March*). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions*. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 293-316.

Clarke, D., Roche, A., Mitchell, A. (2007). *Year six fraction understanding: A part of the whole story*. In *Proceding of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia.* J. Watson y K. Beswick.

DCNB (2005). *Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica.* Propuesta Secretaria de Educación. Honduras

Flores, M., y Kaylor, M. (2007). *The effects of a direct instruction program on the fraction performance of middle school students at-risk for failure in mathematics.* Journal of Instructional Psychology, 34(2), 84-94.

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas*. Centro de Investigación de estudios Avanzados del I.P.N. Departamento de Matemática Educativa (CINVESTAV).

Hernández, S; Fernández, C; Baptista, L. (2006). *Metodología de la investigación.* Cuarta edición McGRAW-HILL/Interamericana editores S.A. de C.V.

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding (2nd ed.)*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lamon, S. (2007). *Rational numbers and proportional reasoning*. In Lester, F.K (Eds.). Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning (pp. 629-667). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

León, H; Fuenlabrada, I. (1996). *Procedimiento de Solución de niños de primaria en problemas de reparto.* Revista Mexicana de Investigación Educativa Julio – Diciembre 1996, ol 1, num2, pp. 268 - 282

Luelmo, M. (2004). *Concepciones Matemáticas de los Docentes de Primaria en relación con las fracciones como razón y como operador multiplicativo*. Revista del centro de investigación. Universidad La Salle, Julio-diciembre 2004 Vol. 6 pp. 83 -102

NCTM (2000). *Principios y estándares para la Educación matemática.* Primera edición en castellano. Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Thales. Sevilla

Parra, M; Flores, R. (s/f). *De la Representación Pictórica al algoritmo en problemas con fracciones: El proceso de solución de alumnos de secundaria con bajo aprovechamiento”* http://www.comie.org.mx/congreso/memoria/v9/ponencias/at01/PRE1178308481.pdf

Perera, D. Valdemoros M. (2007). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria*. Investigaciones en Educación Matemática XI, pp. 209 - 218 CINVESTAV, México, D.F.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Decimocuarta reimpresión, septiembre 1987. Editorial Tillas Mexico.

PROMETAM, (2006). *Proyecto de Mejoramiento en la Enseñanza Técnica en el Área de Matemáticas.* Segunda edición, proyecto de la Secretaría de educación, en coordinación con la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM), con el apoyo técnico Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Santos, T; Luz, M. (1997). *Principios y Métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. 2ª Edición Grupo Editorial Iberoamericana México, D.F.

Santos, T; Luz, M. (s/f). *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav-IPN. www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf

Swokowski, E. (1992). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Tercera Edición Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C.V.

Valdemoros M. (2004). *Lenguaje fracciones y reparto.* Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Noviembre 2004, Vol. 7, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal México. pp. 235 -256